

# Parameteridentifikation mit Hilfe eines strukturmechanischen Modells für Superelastikreifen

Parameter identification using a structural mechanical model for super elastic tires

Arne Pross  
Rainer Bruns

Lehrstuhl für Maschinenelemente und Technische Logistik  
Fakultät für Maschinenbau  
Helmut-Schmidt-Universität, Universität der Bundeswehr, Hamburg

Neben der Fahr- und Kippstabilität werden die Schwingungsbelastungen auf den Fahrer bei Flurförderzeugen erheblich durch die mechanischen Reifeneigenschaften beeinflusst. Die Identifikation dieser Eigenschaften stellt sowohl für die richtige Reifenwahl, als auch für die Durchführung von dynamischen Fahrzeugsimulationen eine große Bedeutung dar. Explizite Belastungszustände und daraus resultierende Deformationen lassen sich jedoch experimentell nur aufwändig mit dem gewünschten Detaillierungsgrad beschreiben. Zur Analyse des mechanischen Verhaltens rücken somit strukturmechanische Ansätze in den Fokus, welche eine simulative Analyse des Reifens unter beliebigen Belastungszuständen erlauben. Daraus resultiert die Möglichkeit einer simulativen Identifikation verschiedener Parameter, welche die mechanischen Reifeneigenschaften definieren, woraus eine Minimierung des experimentellen Aufwandes entsteht.

In diesem Beitrag wird ein auf der Finiten-Elemente-Methode basierendes strukturmechanisches Modell für Superelastikreifen (SE-Reifen) vorgestellt. Neben der Beschreibung des Aufbaus sowie der Validierung des Modells werden Simulationen zur Bestimmung der longitudinalen sowie lateralen Steifigkeit und Dämpfung eines gängigen Reifentyps durchgeführt.

[Schlüsselwörter: Reifen, Reifensimulation, Finite-Elemente-Methode, Parameteridentifikation, Materialmodellierung]

In addition to driving and tipping stability, the stress of vibration on the driver of industrial trucks are significantly influenced by the mechanical properties of the tires. The identification of these properties is of great im-

portance both for the correct tire selection and for carrying out dynamic vehicle simulations. Explicit load conditions and the resulting deformations, however, can only be described experimentally with the desired degree of detail. In order to analyse the mechanical behavior, structural mechanical approaches come into focus, which enable a simulative analysis of the tire under any load conditions. This results in the possibility of a simulative identification of various parameters that define the mechanical tire properties, which results in a minimization of the experimental effort.

This paper presents a structural mechanical model based on the finite element method for superelastic tires (SE tires). In addition to describing the structure and validating the model, simulations are carried out to determine the longitudinal and lateral stiffness and damping of a common tire type.

[Keywords: Tires, Tire Simulation, Finite element method, Parameter identification, Material modeling]

## 1 EINLEITUNG

Reifen bilden das Bindeglied zwischen Fahrzeug und Fahrbahn und nehmen somit eine bedeutende Rolle für die sichere Fortbewegung von Radfahrzeugen ein. Hierbei stellt die Übertragung der Antriebs-, Brems- und Seitenführungskräfte einen wichtigen Faktor dar. Das Übertragungsverhalten hinsichtlich dieser Kräfte ist im Wesentlichen von der Longitudinal- und Lateralsteifigkeit bzw. -dämpfung<sup>1</sup> des Reifens abhängig. Die Bestimmung dieser Parameter ist durch experimentelle Versuche nur sehr schwer zu realisieren. Somit rücken simulative Methoden in den Fokus, welche zu einer vollständigen Parametrierung des

---

<sup>1</sup> Auch oft als Umfangs- und Quersteifigkeit bzw. -dämpfung bezeichnet

Reifens beitragen. In diesem Beitrag wird ein strukturmechanisches Reifenmodell vorgestellt, welches mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode erstellt und zur Identifizierung dieser Parameter konzipiert wurde. Durch einen hohen Detaillierungsgrad bei der Modellierung lassen sich verschiedene Prüfzenarien realitätsnah nachbilden. Neben der Identifizierung von fehlenden Parametern trägt die detaillierte Analyse zum Verständnis der komplexen physikalischen Reifeneigenschaften bei, was sich u.a. auf die Weiterentwicklung von geometrischen und materiellen Varianten sehr hilfreich auswirken würde. Zusätzlich bietet dieser Modellierungsansatz den Vorteil, dass schnell und kostengünstig der Einfluss verschiedener mechanischer Parameter auf das Gesamtverhalten des Reifens untersucht werden kann.

## 2 MODELLAUFBAU

Bevor die Simulationsergebnisse diskutiert werden, wird auf den Aufbau des Modells eingegangen. Neben dem geometrischen Aufbau des Modells rücken hierbei die Diskretisierung sowie die Modellierung des Materialverhaltens in den Fokus, welches durch geeignete kontinuumsmechanische Ansätze abgebildet wird. Der in diesem Beitrag vorgestellte Modellierungsansatz wird exemplarisch für den Reifentyp SH12 200/50-10 der Firma Continental angewendet. Dieser Reifen stellt ein gängiges Modell für Flurförderzeuge mit der Tragfähigkeit von zwei Tonnen dar. Es wurde sich vorerst für einen profillosen Reifentyp entschieden, was sich vorteilhaft auf die Validierung des komplexen Materialverhaltens auswirken soll, da der Einflussfaktor des geometrisch aufwändig gestalteten Profils entfällt. Zusätzlich resultiert hieraus eine deutliche Reduzierung der Rechenzeit. Durch die Variation des geometrischen Modells lässt sich jedoch jeder beliebige Reifentyp abbilden. Hierbei müssen jedoch zusätzlich die im weiteren Verlauf dieses Beitrages vorgestellten Materialmodelle auf den zu untersuchenden Reifentyp angepasst werden.

### 2.1 GEOMETRIE UND DISKRETISIERUNG

Bevor das strukturmechanische Modell aufgebaut werden kann, ist es erforderlich, ein möglichst detailliertes geometrisches Modell des Reifens zu erstellen. Hierfür wird mit einer CAD-Software aus einer detaillierten Schnittansicht ein 3D-Modell des Reifens erstellt. In Abbildung 1 ist der geometrische Aufbau des Modells dargestellt. Aus der Abbildung geht der schichtweise Aufbau des Reifens hervor. Die Schichten besitzen verschiedene Materialeigenschaften, welche das Gesamtverhalten des Reifens beeinflussen. Die sehr abriebfeste äußere Laufschrift um-

schließt hierbei die hochelastische Zwischenschicht, welche aufgrund ihrer speziellen Gummimischung zu einer Erhöhung der dämpfenden Wirkung des Reifens beiträgt [Con07]. Die deutlich steifere innere Bodenschicht ermöglicht einen festen Sitz auf der Felge und trägt nur unwesentlich zur Gesamtverformung des Reifens bei.

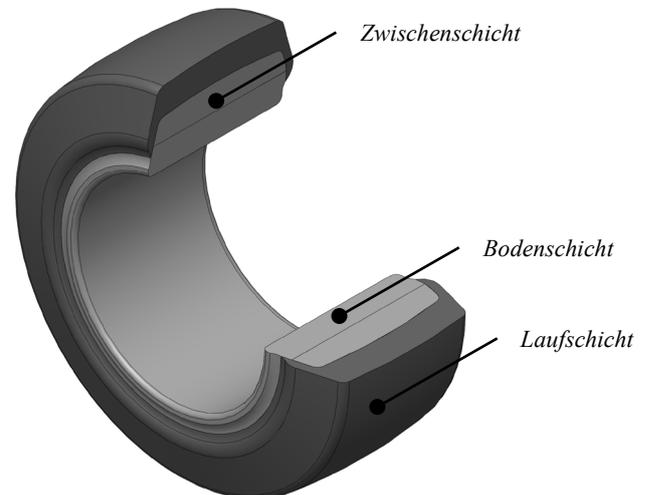


Abbildung 1. Geometrie des SE-Reifenmodells als Schnittdarstellung

Neben der detaillierten Abbildung der Geometrie des Reifens, besitzt die Diskretisierung einen erheblichen Einfluss auf die Simulationsergebnisse. Da aufgrund der starken Verzerrungen im Kontaktbereich, welche auf das hochelastische Material zurückzuführen sind, Konvergenzschwierigkeiten zu erwarten sind, stellt eine saubere Vernetzung in diesem Bereich die Grundlage für eine erfolgreiche Simulation dar. Da das vorgestellte Modell vorerst für quasistatische sowie dynamische Untersuchungen am stehenden Rad zum Einsatz kommt, wird ein ortfestes Netz verwendet, welches im Bereich des Latsches<sup>2</sup> deutlich feiner ausgeführt ist. Durch diese inhomogene Diskretisierung lassen sich die Spannungszustände und Verformungen detaillierter analysieren. Das gesamte Modell ist mit hybriden Hexaederelementen diskretisiert, welche durch eine lineare Formfunktion definiert sind. Die linearen Elemente haben zum einen den Vorteil, dass sich eine deutliche kürzere Rechenzeit einstellt und zum anderen wirkt sich eine lineare Formfunktion positiv auf das Konvergenzverhalten bei Kontaktproblemen aus [SSK11]. Darüber hinaus hat sich bei den Untersuchungen auch keine relevante Abweichung zwischen den Ergebnissen ergeben, was mit der sehr feinen Vernetzung zusammenhängt. Die verwendete hybride Elementform weist im Vergleich zu den üblichen Verschiebungselementen einen weiteren Freiheitsgrad auf. In diesem Fall liegt neben der Verschiebung, der Druck im Element als weiterer Freiheitsgrad vor [SSK11]. Durch das formulierte Materialmodell stehen der

<sup>2</sup> Reifenaufstandsfläche, welche sich unter Last einstellt und den Kontakt zur Fahrbahn herstellt

Druck und die Volumenänderung im Element in direkter Verbindung. Mit diesen hybriden Elementen lässt sich das sog. volumetrische Locking vermeiden, welches verstärkt bei inkompressiblen Werkstoffen, wie z.B. Elastomeren, auftritt [Nas15]. Der beschriebene Elementtyp wird für alle drei Schichten verwendet, wodurch die Verbindung untereinander optimal umgesetzt wird. Das diskretisierte Modell des Reifens ist in Abbildung 2 dargestellt.

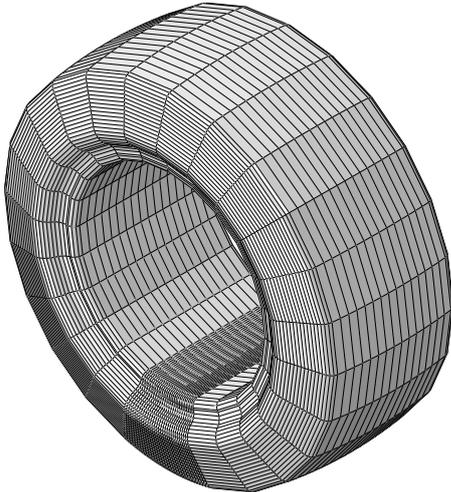


Abbildung 2. Diskretisiertes Modell des SE-Reifens

## 2.2 MODELLIERUNG DES MATERIALVERHALTENS

Die Eigenschaften des Materials eines Körpers werden in der FEM durch geeignete kontinuumsmechanische Stoffgleichungen definiert. Ganz allgemein sind Materialien im Sinne der Kontinuumsmechanik als mathematische Modelle anzusehen, die das mechanische Verhalten von realen Stoffen unter definierten äußeren Bedingungen näherungsweise beschreiben [Bet01]. Um das nichtlineare Verformungsverhalten von Elastomeren sowie die großen Deformationen abbilden zu können, werden häufig hyperelastische Materialmodelle eingesetzt [Höf09]. Diese Modelle sind dadurch gekennzeichnet, dass die Spannungstensoren aus einer skalaren Funktion, der Funktion der gespeicherten Verzerrungsenergie  $\psi$  abzuleiten sind [Nac92]. Es ist eine Vielzahl von Materialfunktionen zur Beschreibung der nichtlinearen Elastizität, welche darüber hinaus große Verformungen abbilden können, aus der Literatur bekannt. In diesem Beitrag wird der wohl einfachste Ansatz, das Neo-Hooke-Modell verwendet. Für eine umfassende Übersicht der gängigen hyperelastischen Modellansätze sei hiermit weiterführend auf [Böl05] verwiesen.

Im Rahmen der klassischen Materialtheorie wird ein einfaches, homogenes und thermoelastisches Material durch den Ansatz

$$\psi = \psi(\mathbf{F}, \vartheta, \text{grad } \vartheta) \quad (1)$$

beschrieben, indem die gespeicherte Verzerrungsenergie lediglich von der aktuellen Verformung, hier vorerst durch den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  ausgedrückt, sowie der Temperatur  $\vartheta$  und dem Temperaturgradienten  $\text{grad } \vartheta$  abhängig ist [Nac00]. Unter der Voraussetzung der Isotropie lässt sich der Ansatz weiter spezifizieren, wodurch die Freie Energie als Funktion der Invarianten des Rechten Cauchy-Green Deformationstensors  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  beschrieben werden kann:

$$\psi = \psi(I_C, II_C, III_C) \quad (2)$$

Die daraus entstandene invariantenbasierte Schreibweise ist eine gängige Form zur Darstellung dieser Modelle. Das Neo-Hooke-Modell lässt sich somit durch die folgende Funktion

$$\psi^{neo}(\mathbf{C}) = \frac{\mu}{2}(I_C - 3) - \mu \ln(J) + \frac{\lambda}{2}[\ln(J)]^2 \quad (3)$$

mit

$$J = \det \mathbf{F} = \sqrt{III_C} \quad (4)$$

beschreiben, wobei  $\mu$  und  $\lambda$  Materialkonstanten (Lamé-Konstanten) darstellen. Die Jacobi-Determinante  $J$  legt hierbei ein Maß für die Volumenänderung eines Körpers fest. Aus der partiellen Ableitung nach dem Deformationstensor  $\mathbf{C}$  resultiert der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathbf{S}$ , welcher eine reine Rechengröße darstellt und physikalisch nicht interpretierbar ist [Böl05]:

$$\mathbf{S}^{neo} = 2 \frac{\partial \psi^{neo}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (5)$$

$$\mathbf{S}^{neo} = \mu(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda \ln(J) \mathbf{C}^{-1} \quad (6)$$

Durch eine push-forward-Transformation<sup>3</sup> ergibt sich der Cauchy-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , welcher den aktuellen Spannungszustand definiert, zu:

$$\boldsymbol{\sigma}^{neo} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S}^{neo} \mathbf{F}^T \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{neo} = \frac{\mu}{J}(\mathbf{b} - \mathbf{I}) + \frac{\lambda \ln(J)}{J} \mathbf{I} \quad (8)$$

Gl. (8) beschreibt somit die allgemeine Form des gesuchten Spannungszustandes, des Neo-Hooke-Modells, in der Momentankonfiguration. Wie oben bereits angedeutet, liegt bei Elastomeren ein nahezu inkompressibles Materialverhalten vor, woraus  $J = 1$  resultiert. Damit ergibt sich

<sup>3</sup> Transport einer rein materiellen Größe ( $\mathbf{S}$ ) in eine rein räumliche Größe ( $\boldsymbol{\sigma}$ )

der Cauchy-Spannungstensor für ein inkompressibles Neo-Hooke-Material zu:

$$\boldsymbol{\sigma}^{neo} = \frac{\mu}{J} (\mathbf{b} - \mathbf{I}) \quad (9)$$

wobei  $\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$  in dieser Gleichung den Linken Cauchy-Green Deformationstensor darstellt.

Neben den großen Verformungen und dem nichtlinearen Deformationsverhalten, besitzen Elastomere ein stark zeitabhängiges mechanisches Materialverhalten [Hos05]. Dieses wird durch ratenabhängiges Verhalten sowie das Auftreten einer dynamischen Hysterese gekennzeichnet [Mid02]. Diese Materialklassifizierung, welche als Viskoelastizität bezeichnet wird, kann durch ein hyperelastisches Materialmodell nicht erklärt werden. Die hierfür geeigneten viskoelastische Beschreibungsformen werden durch rheologische Modelle bestehend aus ideal elastischen und viskosen Körpern approximiert [Mid02]. Der wohl einfachste rheologische Ansatz ist das Maxwell-Element, welches auf der Hintereinanderschaltung der Hook'schen Feder und dem Newtonschen Dämpfer basiert. Da das zeitliche Materialverhalten von Elastomeren jedoch nicht hinreichend genau durch ein Maxwell-Element abgebildet werden kann, wird dieses in der FEM vorzugsweise durch eine Summe von  $e$ -Funktionen (Prony-Reihe) approximiert, die somit eine Parallelschaltung von mehreren Maxwell-Elementen repräsentiert [Aba13]. Die Prony-Reihe zur Beschreibung des zeitlichen Elastizitätsmoduls besitzt somit die Form:

$$E(t) = E_0 \left[ 1 - \sum_{i=1}^N g_i \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right] \quad \text{mit } g_i = \frac{E_i}{E_0} \quad (10)$$

wobei  $E_0$  den Ursprungsmodul,  $E_i$  den Modul und  $\tau_i = \eta_i/E_i$  die Relaxationszeit mit  $\eta_i$  als Viskosität eines Maxwell-Elementes darstellt. Durch  $N$  wird die Anzahl der Prony-Therme bestimmt. Somit ergibt sich die zeitlich abhängige Spannung zu:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = E(t)\boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

Über den oben beschriebenen Ansatz wird jedoch lediglich das langzeitige Materialverhalten abgebildet. Um die Raten- bzw. Frequenzabhängigkeit des Materials bei einer freien oder harmonischen Anregung darstellen zu können werden die konstitutiven Gleichungen im Frequenzbereich in den komplexen Modul  $E^*(\omega)$  überführt, wodurch die Phänomene der Energiedissipation sowie der Materialdämpfung analytisch beschrieben werden können [Mid02].

$$\boldsymbol{\sigma}(\omega) = E^*(\omega)\boldsymbol{\varepsilon}(\omega) \quad (12)$$

Der komplexe Modul charakterisiert somit das Übertragungsverhalten des Materials bei einer dynamischen Anregung und ist durch

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) \quad (13)$$

definiert, wobei  $E'(\omega)$  als Speichermodul und  $E''(\omega)$  als Verlustmodul bezeichnet wird. Der Speichermodul ist hierbei ein Maß für die im Material reversibel gespeicherten Energieanteile, während der Verlustmodul die dissipativen, irreversiblen Anteile wiedergibt [Höf09]. Der Speicher- bzw. Verlustmodul in Abhängigkeit der anregenden Kreisfrequenz  $\omega$  lässt sich durch die folgenden Ausdrücke bestimmen:

$$E'(\omega) = E_0 \left[ 1 - \sum_{i=1}^N g_i \right] + E_0 \sum_{i=1}^N \frac{g_i \tau_i^2 \omega^2}{1 + \tau_i^2 \omega^2} \quad (14)$$

$$E''(\omega) = E_0 \sum_{i=1}^N \frac{g_i \tau_i \omega}{1 + \tau_i^2 \omega^2} \quad (15)$$

Der Quotient aus diesen beiden Größen wird als Verlustfaktor beschrieben und ist ein Maß für die innere Dämpfung des Materials.

$$\tan \delta(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \quad (16)$$

Durch diesen Ansatz lassen sich somit die Steifigkeits- und Dämpfungseffekte frequenzabhängig berücksichtigen, welche bei dem Übertragungsverhalten von Reifen sehr ausgeprägt zu beobachten sind.

Zur realitätsnahen Abbildung des statischen und dynamischen Materialverhaltens werden die vorgestellten Materialmodelle durch experimentelle Daten parametrisiert. Hierfür werden aus den drei Materialschichten Proben angefertigt und genormte Versuche an ihnen durchgeführt. Das hyperelastische Modell wird durch quasistatische Zug- und Druckversuche parametrisiert. Der gemessene Zusammenhang aus Spannung und Dehnung wird als Input Source dem Materialmodell zugänglich gemacht, so dass die benötigten Materialparameter programmintern berechnet werden. Zur Parametrierung des viskoelastischen Ansatzes wird der Speicher- und Verlustmodul der drei Schichten in Abhängigkeit der Belastungsfrequenz aus einem dynamischen Druckversuch ermittelt. Diese werden ebenfalls als Input Source an das Programm übergeben, wodurch das langzeitige bzw. dynamische Materialverhalten charakterisiert wird. Durch die implementierten Materialdaten der verschiedenen Schichten sind die oben dargestellten phänomenologischen Ansätze somit parametrisiert und bilden kombiniert das mechanische Verhalten des Gesamtreifens richtig ab.

### 3 VALIDIERUNG DES MODELLS

Um eine hinreichende Gültigkeit des vorgestellten Modells nachweisen zu können, werden einfache Testszenarien mit Hilfe des Modells nachgebildet und die damit gewonnenen Simulationsergebnisse mit den entsprechenden Versuchsergebnissen verglichen. Die Berechnungen werden mit dem kommerziellen Softwarepaket ABAQUS durchgeführt. Zur Validierung des quasistatischen Modellverhaltens wird die gemessene und simulierte radiale Einfederungskennlinie gegenübergestellt. Der Vergleich zwischen den Kennlinien in Abbildung 3 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung. Daraus kann abgeleitet werden, dass die statischen Druckeigenschaften durch das Modell realitätsnah nachgebildet werden können.

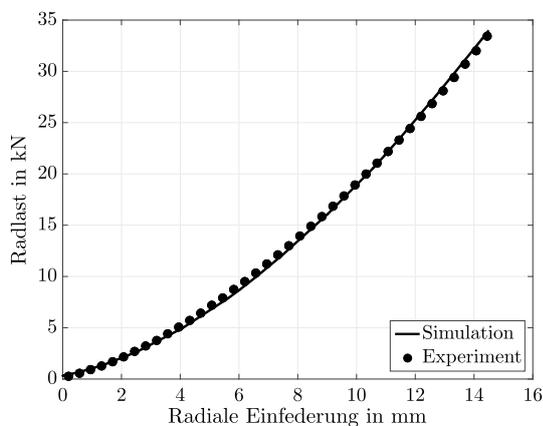


Abbildung 3. Vergleich der gemessenen und simulierten radialen Einfederung

Die angesprochenen Phänomene der Energiedissipation lassen sich bereits bei quasistatischen Beanspruchungen in Form einer Einfederungshysterese beobachten. Diese statische Hysterese resultiert aus der Beanspruchungsgeschichte des Materials und ist somit unabhängig von der Beanspruchungsgeschwindigkeit. Da aus dieser Eigenschaft ein erheblicher Einfluss auf das Einfederungsverhalten des Reifens resultiert, wird sie in dem gezeigten hyperelastischen Materialmodell zusätzlich berücksichtigt.

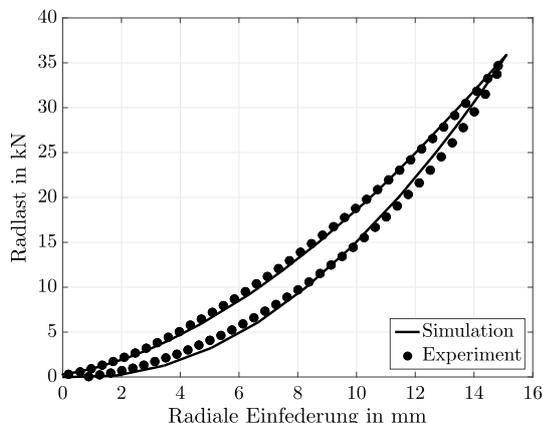


Abbildung 4. Vergleich der gemessenen und simulierten radialen Einfederungshysterese

Abbildung 4 zeigt die Gegenüberstellung des gemessenen und simulierten Hystereseverlaufes, welcher sich bei einem Ein- und Ausfederungsvorgang einstellt. Die Verläufe zeigen eine zufriedenstellende Übereinstimmung.

Zur Validierung der dynamischen Materialeigenschaften werden Versuchsdaten aus einem dynamischen Einfederungsversuch herangezogen und mit den entsprechenden Simulationsergebnissen verglichen. Die experimentellen Daten werden mit Hilfe eines Hydropuls-Prüfstandes generiert, indem der Reifen durch ein oszillierendes Kraftsignal belastet und die resultierende radiale Verformung gemessen wird. Neben der Belastungshöhe wird hierbei zusätzlich die Frequenz der Schwingung variiert, so dass der oben bereits angesprochene Einfluss der Einfederungsgeschwindigkeit untersucht werden kann. In Abbildung 5 sind exemplarisch die gemessenen und simulierten dynamischen Einfederungen bei einer Mittellast  $F_m$  von 8 kN und einer Amplitude  $A$  von 1 kN bei verschiedenen Frequenzen aufgetragen.

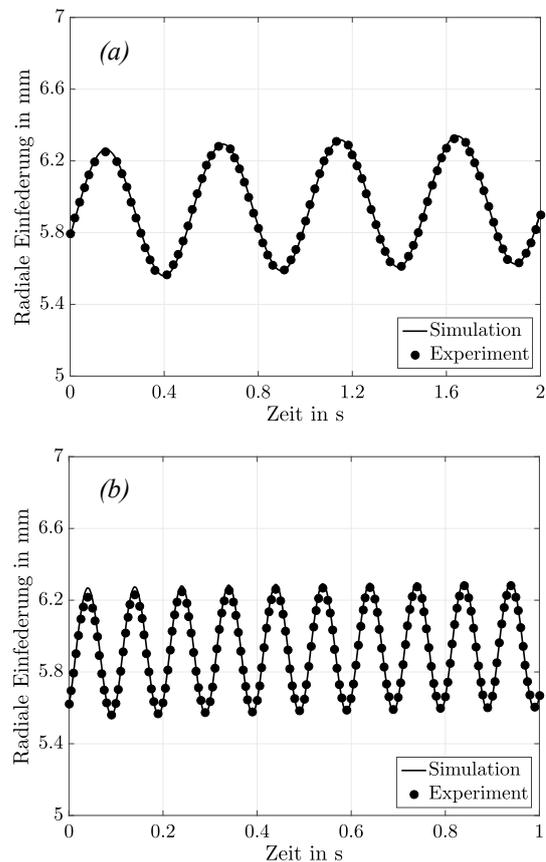


Abbildung 5. Vergleich der gemessenen und simulierten dynamischen Einfederung bei  $F_m=8$  kN,  $A=1$  kN und (a)  $f=2$  Hz sowie (b)  $f=10$  Hz

Aus den dargestellten Kurvenverläufen kann eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Versuchs- und Simulationsergebnissen entnommen werden. Daraus lässt sich ableiten, dass die mechanisch-dynamischen Eigenschaften frequenzabhängig von dem Modell mit zufriedenstellender Genauigkeit wiedergegeben werden können.

#### 4 BESTIMMUNG DER LONGITUDINALEN UND LATERALEN STEIFIGKEIT UND DÄMPFUNG

Nachdem die Gültigkeit des vorgestellten Modells zur Abbildung sowohl von quasistatischen als auch dynamischen Belastungszuständen nachgewiesen werden konnte, wird es zur Identifikation von mechanischen Parametern eingesetzt, welche sich durch experimentelle Versuche schwierig bestimmen lassen. Wie eingangs bereits angesprochen wird das Kraftübertragungsverhalten zwischen Reifen und Fahrbahn wesentlich durch die Longitudinal- und Lateralsteifigkeit sowie -dämpfung bestimmt, wodurch diese Parameter erheblichen Einfluss auf die mechanischen Reifeneigenschaften nehmen. Im weiteren Verlauf wird auf die Modellierung der Testszenarien sowie auf die Bestimmung der angesprochenen Parameter eingegangen.

##### 4.1 DEFINITION DER BELASTUNGSZUSTÄNDE

Für die gezielte Bestimmung der Longitudinal- sowie Lateralsteifigkeit muss der Reifen bzw. das Modell einen bestimmten Belastungszustand ausgesetzt werden. Hierfür wird in beiden Fällen die Innenseite der Bodenschicht (vgl. Abbildung 1) fixiert, welche in Realität die Verbindung zur Felge darstellt. Der aufgrund einer vorgegebenen Radlast eigefederte Reifen wird zur Bestimmung der longitudinalen Steifigkeit in x-Richtung (Umfangsrichtung) belastet. Zur Charakterisierung des lateralen Verhaltens wird der Reifen in y-Richtung (Querrichtung) einer Belastung ausgesetzt. Der schematische Aufbau ist in Abbildung 6 grob skizziert. Zur Bestimmung der quasistatischen Steifigkeiten wird der Quotient aus der eingeleiteten Kraft, bzw. des Momentes, und der Verschiebung bzw. dem Winkel, welcher sich zwischen Kräfteinleitungspunkt und Radmitte einstellt, gebildet. Durch die Vorgabe eines zeitlich veränderlichen Kraftsignals kann aus der resultierenden Verformung auf die dynamischen Steifigkeiten sowie auf die Dämpfungen des Reifens in longitudinaler und lateraler Richtung geschlossen werden. Die Dämpfungseigenschaften sind durch experimentelle Versuche besonders schwierig zu ermitteln und besitzen einen erheblichen Einfluss auf die dynamischen Reifeneigenschaften, wodurch auf diese Simulationsergebnisse ein besonderes Interesse gerichtet ist.

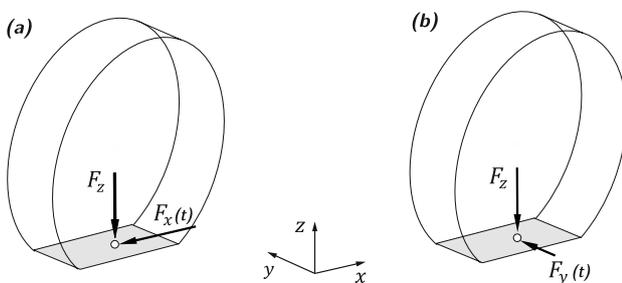


Abbildung 6. Schematischer Aufbau der Prüfversuche zur Bestimmung der Steifigkeit sowie der Dämpfung in (a) longitudinaler bzw. (b) lateraler Richtung

#### 4.2 ERGEBNISSE UND AUSWERTUNG DER SIMULATIONEN

Zu Beginn der simulationsgestützten Untersuchungen werden die quasistatischen Eigenschaften in longitudinaler bzw. lateraler Richtung betrachtet. Hierbei wird der Reifen zunächst durch eine Radlast  $F_z$  auf eine ebene Platte gedrückt. Diese wird daraufhin durch ein lineares Kraftsignal in x- bzw. y-Richtung belastet. Somit kann die Abhängigkeit der Longitudinal- bzw. Lateralkraft von der Radlast und der dazugehörigen Verschiebung gezeigt werden. Einen zusätzlichen Einflussfaktor stellt der Reibbeiwert zwischen Reifen und Platte bei diesen Untersuchungen dar, welcher jedoch erst im Bereich von hohen Kräften deutlich zu erkennen ist. Zur Darstellung des Einflusses ist in Abbildung 7 exemplarisch der Verlauf der Lateralkraft in Abhängigkeit des Reibbeiwertes  $\mu$  abgebildet. Die Radlast bei allen Simulationen beträgt hierbei 8 kN.

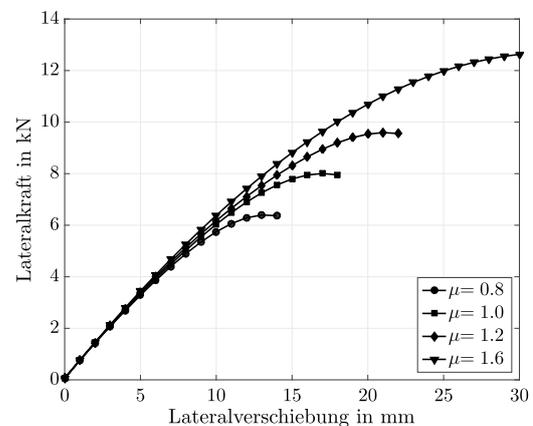


Abbildung 7. Simulierte Lateralkraft  $F_y$  in Abhängigkeit der Lateralverschiebung  $u_y$  und des Reibbeiwertes  $\mu$

In der Darstellung lässt sich erkennen, dass es ab einer Lateralkraft von ca. 5 kN zu einer Abweichung zwischen den Verläufen kommt, welche aus einem vorzeitigen Durchrutschen des Reifens aufgrund des niedrigeren Reibbeiwertes resultiert. Da die Reibung in dem formulierten Kontaktmodell als isotrop definiert ist, ist in longitudinaler Richtung eine vergleichbare Abhängigkeit zu erwarten. In den weiteren Untersuchungen wird somit von einem Reibbeiwert von 0,8 ausgegangen, welcher aus der Literatur sowie aus einfachen Versuchen mit Hilfe der schiefen Ebene bekannt ist. Wie bereits angesprochen besitzt die Radlast ebenfalls einen Einfluss auf die Kraftübertragung in lateraler Richtung. Dieser resultiert aus einer größeren Kontaktfläche zwischen Reifen und Platte, wodurch eine erhöhte Reibkraft übertragen werden kann. Zur Beschreibung dieses Einflusses ist in Abbildung 8 die Lateralkraft in Abhängigkeit der Lateralverschiebung bei unterschiedlichen Radlasten dargestellt. Der degressive, nichtlineare Kurvenverlauf resultiert wie oben bereits erwähnt aus der Überwindung der Reibkraft und der damit verbundenen Relativbewegung zwischen Reifen und Platte.

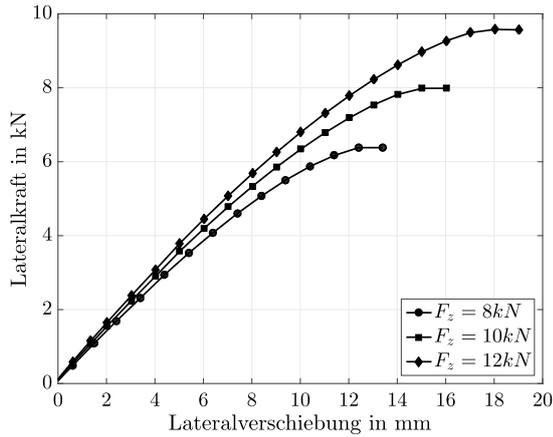


Abbildung 8. Simulierte Lateralkraft  $F_y$  in Abhängigkeit der Lateralverschiebung  $u_y$  und der Radlast  $F_z$

Die Lateralsteifigkeit kann nun durch den Quotient  $\Delta F_y / \Delta u_y$  aus dem Kraft-Weg-Verlauf ermittelt werden. Üblicherweise wird die Lateral- sowie die Longitudinalsteifigkeit jedoch als rotatorische Steifigkeit angegeben. Hierbei wird der Quotient aus dem eingeleiteten Drehmoment und dem resultierenden Verdrehwinkel gebildet. Für die rotatorische Lateralsteifigkeit gilt somit der Zusammenhang

$$c_x^{Rot} = \frac{\Delta M_x}{\Delta \varphi_x} = \frac{\Delta F_{y,z}}{\text{atan}(\Delta u_{y/z})} \quad (17)$$

wobei der Hebelarm  $z$  hierbei die Höhe der Bandage im eingefederten Zustand darstellt. Der Verlauf der simulierten Steifigkeit in Abhängigkeit der Lateralkraft und der Radlast ist in Abbildung 9 aufgetragen. In dem Diagramm lassen sich nochmals alle bereits angesprochenen Phänomene deutlich erkennen. Während die Steifigkeit mit steigender Radlast zunimmt, wird sie mit Erhöhung der Lateralkraft immer geringer. Die Steifigkeit nimmt so lange ab, bis sie bei der Reibkraft  $F_R = \mu F_z$  schließlich gegen Null geht.

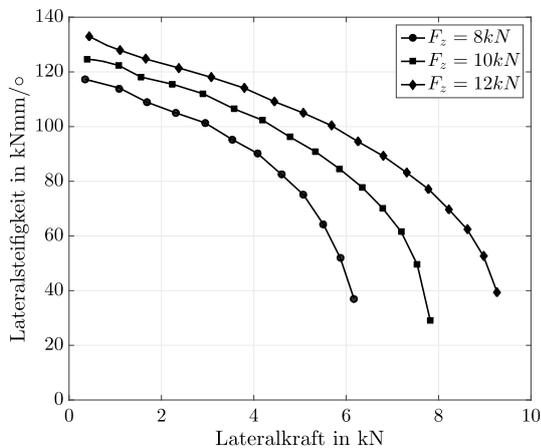


Abbildung 9. Simulierte quasistatische rotatorische Lateralsteifigkeit  $c_x$  in Abhängigkeit der Lateralkraft  $F_y$  und der Radlast  $F_z$

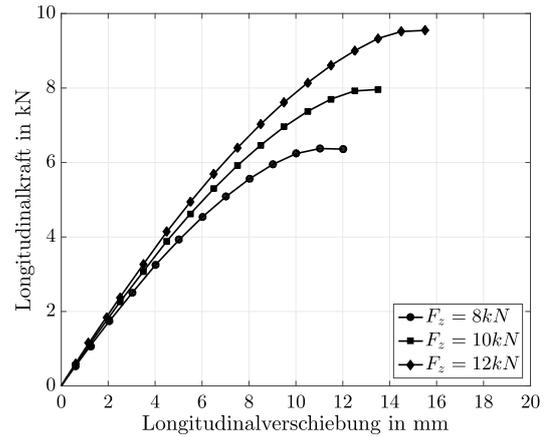


Abbildung 10. Simulierte Longitudinalkraft  $F_x$  in Abhängigkeit der Longitudinalverschiebung  $u_x$  und der Radlast  $F_z$

In Abbildung 10 ist der simulierte Kraft-Weg-Verlauf der Longitudinalkraft ebenfalls in Abhängigkeit der Verschiebung sowie der Radlast gezeigt. Der Kurven zeigen einen ebenfalls degressiven, nichtlinearen Verlauf und sind somit vergleichbar mit dem der Lateralkraft. Neben dem steiferen Verhalten des Reifens in longitudinaler Richtung lässt sich zusätzlich ein vorzeitiges Durchrutschen erkennen. Die höhere Steifigkeit resultiert aus der rechteckförmigen Form der Kontaktfläche, welche in  $y$ -Richtung stärker ausgeprägt ist und somit eine anfänglich höhere Reibkraft entsteht. Die vorzeitige Relativbewegung zwischen Reifen und Platte ist auf die Verkleinerung der Kontaktfläche mit steigender Verformung zurückzuführen. Die Erhöhung der Steifigkeit lässt sich nochmals sehr eindeutig aus Abbildung 11 entnehmen. Wie schon in lateraler Richtung ist hier die Steifigkeit als rotatorische Steifigkeit in Abhängigkeit der zugehörigen Belastung aufgezeigt. Zur Bestimmung dieses Parameters wird ebenfalls der Zusammenhang aus Gl. (17) verwendet, wobei lediglich die entsprechenden Kräfte und Verformungen in  $x$ -Richtung eingesetzt werden müssen. Die Kraft, an der die Steifigkeit gegen Null geht, ist logischerweise ebenfalls die Reibkraft  $F_R$ .

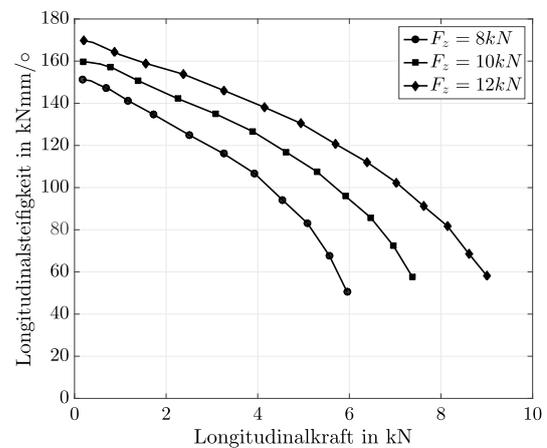


Abbildung 11. Simulierte quasistatische rotatorische Longitudinalsteifigkeit  $c_y$  in Abhängigkeit der Longitudinalkraft  $F_x$  und der Radlast  $F_z$

Nachdem die Verläufe der quasistatischen Steifigkeiten in lateraler und longitudinaler Richtung erfolgreich ermittelt werden konnten, werden nun zusätzlich die dynamischen Eigenschaften des Reifens betrachtet. Hierfür wird das Modell durch ein dynamisches Kraftsignal belastet und die resultierende Verformung aufgenommen. Der Aufbau des Modells ist identischen mit dem bei den quasistatischen Untersuchungen (vgl. Abbildung 6), lediglich das Kraftsignal ist nun zeitlich abhängig. Aus dem sinusförmigen Kraft- und Wegsignal lässt sich die dynamische Steifigkeit sowie die Dämpfung des Reifens in Abhängigkeit der Radlast, Amplitude und Belastungsfrequenz bestimmen. In diesem Beitrag wird jedoch nur auf die Frequenzabhängigkeit eingegangen, da diese den größten Einfluss auf das dynamisch-mechanische Reifenverhalten besitzt. Zur Bestimmung der Steifigkeit sowie der Dämpfung wird der Aufbau als Torsionsschwinger idealisiert, wodurch die allgemeine Bewegungsgleichung wie folgt aufgestellt werden kann:

$$M(t) = \theta \ddot{\varphi}(t) + d_T \dot{\varphi}(t) + c_T \varphi(t) \quad (18)$$

Hierbei stellt  $M(t)$  das vorgegebene Belastungssignal,  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$ ,  $\ddot{\varphi}(t)$  die resultierende Verdrehung bzw. die Verdrehungsgeschwindigkeit und -beschleunigung und  $\theta$ ,  $d_T$ ,  $c_T$  die gesuchten mechanischen Parameter des Reifens dar. Da aus den sehr geringen Wegen lediglich kleine Verdrehungsbeschleunigungen resultieren, kann die Gl. (18) zu einem System 1. Ordnung vereinfacht werden, welches somit nur von der gesuchten Steifigkeit und Dämpfung abhängt. Zur Bestimmung dieser Parameter wird das Ziel verfolgt, den Fehler zwischen theoretischer Lösung (T) und den Simulationsergebnissen (S) möglichst gering werden zu lassen. Hierfür wird die Methode der kleinsten Fehlerquadrate angewendet, wodurch folgendes Optimierungsproblem entsteht:

$$e(d_T, c_T) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [M_S(t) - M_T(t)]^2 dt \rightarrow \min \quad (19)$$

Das Minimum dieses Zusammenhanges wird durch die Bildung der partiellen Ableitungen nach den gesuchten Parametern lokalisiert, woraus folgendes Gleichungssystem resultiert:

$$\begin{pmatrix} d_t \\ c_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\varphi} \varphi dt & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi^2 dt \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\varphi}^2 dt & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi \dot{\varphi} dt \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \int_{t_n}^{t_{n+1}} M \varphi dt \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} M \dot{\varphi} dt \end{pmatrix} \quad (20)$$

Die Auswertung der simulierten Momenten- bzw. Winkelsignale wird über ein einfaches MATLAB-Skript realisiert, welches den Vektor mit den gesuchten Parametern ausgibt. Die Vorgehensweise ist bei der Bestimmung der longitudinalen und lateralen Parameter identisch. Lediglich der Verlauf des Momentes und der Verdrehung muss entsprechend angepasst werden. Für die folgenden Untersuchungen wird eine Radlast von 8 kN, eine Amplitude von 1 kN und verschiedene Frequenzen angenommen.

Der Verlauf der dynamischen longitudinalen und lateralen Steifigkeit in Abhängigkeit der Belastungsfrequenz  $f$  ist in Abbildung 12 dargestellt. Die Steifigkeiten weisen einen für Reifen bzw. für Elastomerwerkstoffen typischen Charakter auf. Die Erhöhung der Steifigkeit des Materials bei zunehmender Belastungsfrequenz ist auch als dynamische Verhärtung bekannt und lässt sich ebenfalls bei der radialen Steifigkeit des Reifens sowie bei Materialuntersuchungen an Elastomeren beobachten. Der nahezu lineare Anstieg ermöglicht eine gute Vorhersage auch außerhalb dieses Frequenzspektrums. Wie schon bei der quasistatischen Betrachtung weist der Reifen in longitudinaler Richtung eine höhere Steifigkeit auf. Allgemein kann festgehalten werden, dass der Einfluss der Belastungsfrequenz nicht sehr hoch ist, er jedoch auch nicht vernachlässigt werden kann.

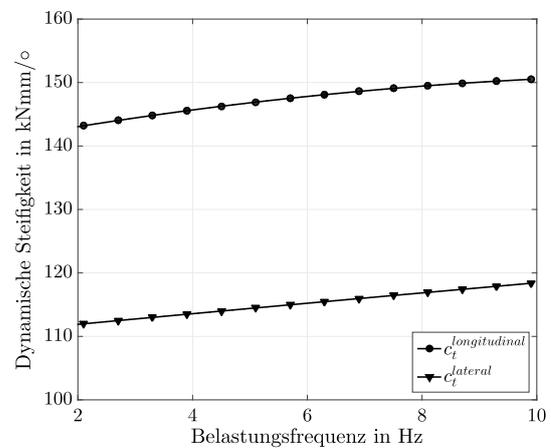


Abbildung 12. Simulierter Verlauf der lateralen und longitudinalen dynamischen Steifigkeit in Abhängigkeit der Belastungsfrequenz  $f$

Die Verläufe der Dämpfung, welche in Abbildung 13 dargestellt sind, zeigen im Vergleich zur Steifigkeit eine deutlich stärkere Abhängigkeit von der Belastungsfrequenz. Der nichtlineare, abfallende Kurvenverlauf stellt ebenfalls ein für Elastomere typisches Verhalten dar.

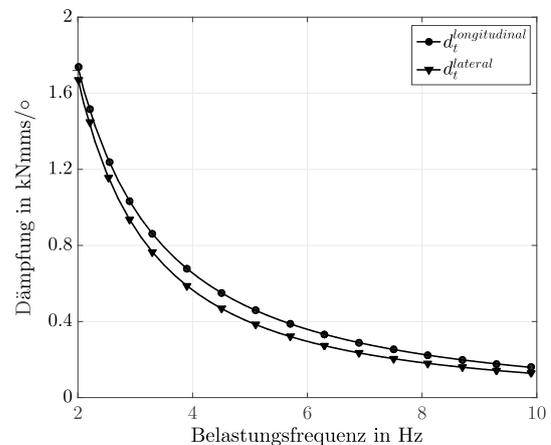


Abbildung 13. Simulierter Verlauf der lateralen und longitudinalen Dämpfung in Abhängigkeit der Belastungsfrequenz  $f$

Aus dem Verlauf kann abgeleitet werden, dass sich bei hohen Frequenzen ein nahezu konstantes Dämpfungsverhalten einstellen wird, was sich auf eine mögliche Approximation sehr positiv auswirkt. Die Dämpfungen in longitudinaler und lateraler Richtung bewegen sich in einem ähnlichen Wertebereich. Aus experimentellen Untersuchungen in radialer Richtung ist bekannt, dass die Sowohl die Steifigkeit als auch die Dämpfung mit steigender Radlast zunimmt. Dieses Verhalten ist somit wohl ebenfalls bei den longitudinalen und lateralen Komponenten zu erwarten.

## 5 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In diesem Beitrag wurde ein Modell zur strukturmehchanischen Analyse des mechanischen Verhaltens von SE-Reifen vorgestellt. In diesem Zusammenhang wird das Modell zur Identifikation von mechanischen Reifenparametern eingesetzt, welche durch experimentelle Versuche schwierig zu erfassen sind. In diesem Beitrag stand die Bestimmung der longitudinalen bzw. lateralen Steifigkeit und Dämpfung eines gängigen SE-Reifentyps im Fokus. Zu Beginn wurde jedoch vorerst auf das grundsätzliche Vorgehen bei der Modellerstellung eingegangen. Hierbei wurde im Detail auf die geometrische Modellierung bzw. die Diskretisierung des Modells sowie auf die Beschreibung der Materialeigenschaften eingegangen. Im Anschluss konnte durch den Vergleich von Simulations- und Versuchsergebnissen die Gültigkeit des vorgestellten Modells unter statischen sowie dynamischen Belastungszuständen nachgewiesen werden. Im Abschluss wurden durch definierte Belastungszustände die longitudinalen und lateralen Eigenschaften des Reifens untersucht. Hierbei ließ sich vorerst durch die ermittelten Kraft-Weg-Verläufe die Abhängigkeit der Longitudinal- bzw. Lateralkraft von dem Reibbeiwert sowie der Radlast aufzeigen. Aus diesen Verläufen konnte die quasistatische Steifigkeit in Abhängigkeit dieser Parameter bestimmt werden. Im Anschluss wurden die dynamischen Eigenschaften des Reifens in longitudinaler und lateraler Richtung betrachtet. Hierfür wurde der Reifen durch ein sinusförmiges Kraftsignal belastet, woraus die zeitlich veränderliche Verschiebung bzw. Verdrehung resultierte. Mit diesen Daten konnte die dynamische Steifigkeit sowie die Dämpfung des Reifens in Abhängigkeit der Belastungsfrequenz ermittelt werden. Die ermittelten Kurven stellten einen für Elastomerwerkstoffe typischen Verlauf dar. Somit ließ sich in diesem Beitrag zeigen, dass die Charakterisierung der longitudinalen und lateralen mechanischen Eigenschaften mit Hilfe eines strukturmehchanischen Ansatzes erfolgreich und mit vertretbarem Aufwand ermitteln lassen.

Bevor eine Erweiterung des Modells fokussiert wird, ist das Spektrum der Randbedingungen, bei denen die Untersuchungen durchgeführt wurden, zu erweitern. In weiteren Schritten wird das Modell daraufhin so erweitert, dass neben der Parameteridentifikation am stehenden Rad ebenfalls Untersuchungen während des Rollvorganges durchgeführt werden können. Im Fokus dieser Erweiterungen steht die Abbildung des Rollkontaktes zwischen Reifen und Fahrbahn. Hierfür ist es notwendig eine relativkinematische Betrachtungsweise der Bewegung zu formulieren. Dies wird durch die Einführung einer Zwischenkonfiguration, der sog. ALE<sup>4</sup>-Referenzkonfiguration, realisiert. Die ALE-Formulierung sorgt dafür, dass die Rollbewegung in eine reine Starrkörperbewegung und in eine Deformation relativ zu Zwischenkonfiguration zerlegt wird. Diese Formulierung besitzt den Vorteil, dass eine feine Diskretisierung des Modells lediglich im Kontaktbereich des Reifens notwendig ist, woraus deutlich kürzere Rechenzeiten resultieren. Durch die korrekte Abbildung des Rollvorganges wäre eine deutlich umfangreichere Reifenoptimierung möglich. Mit der Kenntnis der Deformationszustände bei Schwellenüberfahrten oder der Kräfteentwicklung bei Kurvenfahrten könnten geometrische und materielle Reifenvarianten simulativ im Vorhinein geprüft werden. Zusätzlich lassen sich gewisse physikalische Effekte bei diesen Fahrmanövern nur bedingt experimentell erklären, wodurch ein tiefergehendes Verständnis des Reifenverhaltens aus den Simulationen resultieren würde.

---

<sup>4</sup> *Arbitrary-Lagrangian-Eulerian* oder *Mixed-Lagrangian-Eulerian Formulierung*

LITERATUR

- [Aba13] Dassault Systèmes: *Abaqus Analysis User's Manual*. Providence RI, U.S.A., 2013.
- [Bet01] Betten, Josef: *Kontinuumsmechanik – Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe*. Berlin, Springer-Verlag, 2001. – ISBN 3-540-42043-6
- [Böl05] Böhl, Markus: *Numerische Simulation von Polymernetzwerken mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode*. Dissertation, Bochum, Ruhr Universität Bochum, Institut für Mechanik, 2005.
- [Con07] Continental AG: *Technischer Ratgeber Industrie- / MPT- / EM-Reifen*. Hannover, PR-Artikel, 2007.
- [Hol00] Holzapfel, Gerhard A.: *Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons Ltd., 2000. – ISBN 978-0471823193
- [Hos05] Hosford, William F.: *Mechanical Behavior of Materials*. Cambridge, University Press, 2005.
- [Höf09] Höfer, Philipp: *Dynamische Eigenschaften technischer Gummiwerkstoffe – Experiment, thermomechanische Materialmodellierung & Implementierung in die FEM*. Dissertation, München, Universität der Bundeswehr München, Institut für Mechanik, 2009.
- [Mid02] Middendorf, Peter: *Viskoelastisches Verhalten von Polymersystemen – Materialmodellierung und Finite Elemente Implementierung bei kleinen und finiten Deformationen*. Dissertation, München, Universität der Bundeswehr München, Institut für Mechanik, 2002.
- [Nac92] Nackenhorst, Udo: *Zur Berechnung schnell rollender Reifen mit der Finite Elemente Methode*. Dissertation, Hamburg, Helmut-Schmidt-Universität Hamburg, Institut für Mechanik, 1992.
- [Nac00] Nackenhorst, Udo: *Rollkontaktdynamik – Numerische Analyse der Dynamik rollender Körper mit der Finiten Elemente Methode*. Habilitationsschrift, Hamburg, Helmut-Schmidt-Universität Hamburg, Institut für Mechanik, 2000.
- [Nas15] Nasdala, Lutz: *FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik*. München, Springer Vieweg, 2015. – ISBN 978-3-658-06629-1
- [SSK11] Stommel, Markus; Stojek, Markus; Korte, Wolfgang: *FEM zur Berechnung von Kunststoff- und Elastomerbauteilen*. München, Carl Hanser Verlag, 2011. – ISBN 978-3-446-42909-3

---

**Arne Pross, M.Sc.** studierte Maschinenbau an der Technischen Universität Braunschweig und ist seit Dezember 2015 am Lehrstuhl für Maschinenelemente und Technische Logistik an der Helmut-Schmidt-Universität in Hamburg als wissenschaftlicher Mitarbeiter tätig.

**Prof. Dr.-Ing. Rainer Bruns** hat Luft- und Raumfahrt an der Technischen Universität Braunschweig studiert und ist seit 1992 Leiter des Lehrstuhls für Maschinenelemente und Technische Logistik an der Helmut-Schmidt-Universität in Hamburg.

Adresse: Helmut-Schmidt-Universität, Universität der Bundeswehr Hamburg, Fakultät für Maschinenbau, Lehrstuhl für Maschinenelemente und Technische Logistik, Holstenhofweg 85, 22043 Hamburg,

E-Mail: arne.pross@hsu-hh.de

Tel.: 040 6541 / 2910

E-Mail: rainer.bruns@hsu-hh.de

Tel.: 040 6541 / 2855