

Analytische Stauprognose in Stetigfördersystemen im Rahmen der Systemplanung

Analytical approach for congestion forecasts in conveying
systems during the planning stage

Eike-Niklas Jung
Michael ten Hompel

*Lehrstuhl für Förder- und Lagerwesen FLW
Fakultät Maschinenbau
Technische Universität Dortmund*

Die Ermittlung der Leistung von Stetigfördersystemen ist eine der elementaren Aufgaben bei der Systemplanung. Das innerhalb des Beitrages beschriebene Verfahren soll es ermöglichen, den Einfluss von Staus aufgrund von stochastischen Prozessen in diesem Zusammenhang zu berücksichtigen, ohne hierfür aufwendige Simulationsstudien durchführen zu müssen. Dabei soll insbesondere die leistungs- und abnahmegerechte Gestaltung der Systeme auf Basis der VDI-Richtlinie 4486 „Leistungsverfügbarkeit“ unterstützt werden. Der Schwerpunkt liegt auf der Untersuchung und der mathematischen Beschreibung der technischen Prozesse in stetigen Verzweigungselementen, insb. bei getakteten Eingangsströmen. Die dabei entwickelte Berechnungsmethode wird anhand eines Beispiels demonstriert. Der Beitrag schließt mit einer kurzen Zusammenfassung und einem Fazit.

[Schlüsselwörter: Stauprognose, Stetigfördersysteme, Verzweigungselement, getakteter Strom, stochastische Abfertigung]

Determining the performance of continuous conveyor systems is one of the fundamental tasks during the planning stage. The method presented in this paper considers the influence of congestion due to stochastic processes in this context, instead of performing complex simulation studies. The method should also support the performance- and approval-related design of the systems in particular on the basis of VDI guideline 4486 "Performance availability". This paper focusses on the investigation and the mathematical description of the technical processes in continuous branching elements, especially with clocked material flows. The developed calculation method is demonstrated with a simple example. The paper ends with a short summary and conclusion.

[Keywords: Congestion forecast, continuous conveyor systems, branching element, clocked material flow, first-come-first-served]

1 EINLEITUNG

Der Fokus aktueller Entwicklungen im Bereich der Intralogistiksysteme liegt zunehmend auf flexiblen, anpassungsfähigen Systemen, die vielfach auf autonome Fahrzeuge und damit Unstetigförderer setzen. Dennoch gibt es weiterhin eine Vielzahl von Anwendungsfällen, insbesondere im mittleren bis hohen Leistungssegment, die das Prinzip der stetigen Förderung und damit den Einsatz von Stetigfördertechnik erfordern. Flexibilisierungsbemühungen in diesem Bereich betreffen in erster Linie die Möglichkeit zur Anpassung der Systemstruktur und der daraus resultierenden Förderwege, nicht jedoch das Förderprinzip selber. Insofern sind die existierenden Methoden für die Leistungsermittlung weiterhin geeignet, strukturflexible Systeme zu untersuchen. Im Hinblick auf die Anwendung der VDI-Richtlinie 4486 gilt es zu prüfen, inwiefern die existierenden Methoden die für die abnahmegerechte Gestaltung der Systeme notwendigen Kenngrößen ermitteln können. Neben der grundsätzlichen Eignung ist im Rahmen der Systemplanung der Aufwand für die Anwendung der Methoden eine zentrale Einflussgröße, da zu diesem Zeitpunkt u.U. eine Vielzahl von Varianten zu untersuchen ist. Analytische Ansätze bieten den Vorteil, dass sie unmittelbar eine abgesicherte Lösung liefern, während bei einer Simulation neben dem Modellierungsaufwand zusätzlich eine Vielzahl an Experimenten durchgeführt werden muss. Insofern erscheint es sinnvoll, bestehende analytische Verfahren auf ihre Eignung zu überprüfen und ggf. zu neuen Verfahren weiter zu entwickeln.

1.1 PROBLEMSTELLUNG

Fördersysteme dienen im Allgemeinen der Ortsveränderung von Objekten und Gütern von Quellen zu Senken. Je nach Struktur des Fördersystems entstehen dabei an Kreuzungen unterschiedlicher Materialflüsse sogenannte Konfliktpunkte. An diesen Stellen werden entweder Materialflüsse zusammengeführt oder verzweigt,

wodurch es zu Verzögerungen aufgrund der Belegungssituation des jeweiligen Konfliktpunktes kommen kann. Die existierenden analytischen Verfahren ermitteln beispielsweise den Durchsatz bei konfliktfreiem Durchlauf, die Auslastung des Knotens und den daraus resultierenden maximalen Durchsatz oder die Anzahl der im Mittel in der Warteschlange befindlichen Objekte (vgl. [Gro84]; [Gud10]; [Fur00]; [Ral98]). Im Hinblick auf die Anwendung der VDI-Richtlinie 4486 erscheinen diese Verfahren jedoch aus verschiedenen Gründen nicht ausreichend. Die VDI-Richtlinie 4486 definiert die Leistungsverfügbarkeit als Erfüllungsgrad eines definierten Geschäftsprozesses [VDI4486]. Konkret bedeutet dies, dass die Anzahl der pünktlichen Objekte in Bezug zur gesamten Objektanzahl gesetzt wird. Die Pünktlichkeit kann dabei entweder über Wartezeiten an der Schnittstelle zum nächsten Prozess oder die Einhaltung definierter Laufzeiten definiert werden. Im letzteren Fall gilt es folglich, eine geeignete Vorgabe für die Objektlaufzeit zu finden, die systembedingte Verzögerungen berücksichtigt. Das Minimum der Objektlaufzeit kann über die technischen Parameter (Distanzen, Fördergeschwindigkeiten, Mindestabstände etc.) ermittelt werden und stellt den Fall des konflikt- und damit verzögerungsfreien Objektdurchlaufs dar. Für die Bestimmung eines sinnvollen Vorgabewertes ist diese untere Schranke nur bedingt geeignet, da die zugrunde liegende Situation in realen Systemen nicht den Normalfall darstellt.

1.2 ZIELSETZUNG UND VORGEHENSWEISE

Das Ziel des Beitrages ist es daher, in Abhängigkeit der Systemstruktur und der resultierenden Last der Knoten die Gesamtzahl der an den Knoten durch Staus verzögerten Objekte zu ermitteln. Neben der Bestimmung einer Soll-Laufzeit ermöglicht dies die Festlegung von Maßnahmen, um die auftretenden Verzögerungen zu reduzieren. Die existierenden Methoden aus den Bereichen der Grenzleistungsrechnung und der Warteschlangentheorie liefern hierzu keinen geeigneten Ansatzpunkt, da sie entweder die benötigten Größen nicht ermitteln können oder eine zu starke Abstraktion von der Realität notwendig ist. Im Folgenden wird der innerhalb der Knoten ablaufende, technische Prozess realitätsgetreu untersucht. Dazu werden zunächst alle relevanten Einflussgrößen identifiziert und zueinander in Beziehung gesetzt. Aufgrund des Umfangs beschäftigt sich der Beitrag anschließend nur mit der Untersuchung von Verzweigungselementen. Während bei Zusammenführungen intuitiv nachvollzogen werden kann, dass es zu Verzögerungen vor dem Knoten aufgrund der aktuellen Belegungssituation kommen kann, erscheint dies für Verzweigungen zunächst nicht plausibel. Bei genauerer Betrachtung kann es in Abhängigkeit von der Technik vor Verzweigungen ebenfalls zu Verzögerungen von Objekten kommen. Diese sind mitunter als kritischer zu bewerten, da sie von der Ankunftsreihenfolge der Objekte und den daraus resultierenden Schaltvorgängen abhängen. Während bei Zusammenführungen durch Auswahl der Strategie und durch die Möglichkeit,

auf alle eingehenden Stromrichtungen unmittelbar zugreifen zu können, die Anzahl der Schaltvorgänge direkt beeinflusst werden kann, ist dies bei Verzweigungen nicht unmittelbar möglich. Die ankommenden Objekte können nur in der Reihenfolge ihrer Ankunft abgefertigt werden. Die mathematische Beschreibung dieser zufälligen Objektankünfte und die daraus resultierende Möglichkeit zur vollständigen Zerlegung des Eingangstromes in Folgen von schaltenden und nicht-schaltenden Objekten sind wesentliche Grundlagen für das Verständnis der ablaufenden Prozesse und die weiteren Berechnungen. Auf dieser Basis wird in Kapitel 3 ein Modell zur Abschätzung der durch Stau verzögerten Objekte entwickelt und in Kapitel 4 an einem Beispiel demonstriert. Der Beitrag schließt mit der Zusammenfassung der wesentlichen Erkenntnisse und einem kurzen Ausblick in Kapitel 5.

2 GRUNDLAGEN

Die existierenden analytischen Methoden zur Leistungsermittlung von Fördersystemen lassen sich im Wesentlichen in drei Kategorien unterteilen: die klassische, konfliktfreie Durchsatzberechnung, die Grenzleistungsrechnung und die Warteschlangentheorie. Alle drei finden sich in den Standardwerken der Materialflusssysteme in unterschiedlicher Detaillierung (vgl. [AF09]; [Gro84]; [Gud10]). Darüber hinaus wird die Anwendung der Warteschlangentheorie für Materialflusssysteme in [Gud76b], [Fur00] und [Ral98] mit verschiedenen Schwerpunkten weiter vertieft. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die Anwendung der Methoden für Stetigfördersysteme und insbesondere solche mit stetiger Abfertigungsart. Stetigfördersysteme sind eine spezielle Ausprägung der Fördersysteme, in denen Fördermittel, sog. Stetigförderer, eingesetzt werden, die bei Förderung von Stückgut (diskreten Objekten) einen diskret kontinuierlichen Fördergutstrom erzeugen [HSN07]. Zur Klassifikation der Elemente innerhalb des Fördersystems anhand ihrer Eingangs- und Ausgangspunkte führt Gudehus den Begriff des irreduziblen Transportknotens ein (vgl. [Gud75]; [Gud76a]). Elemente mit einem Ein- und Ausgang werden als Streckenelemente, mit einem Eingang und zwei oder mehr Ausgängen als Verzweigungs- bzw. Verteilelemente, mit zwei oder mehr Eingängen und einem Ausgang als Zusammenführungs- bzw. Sammelemente und solche mit mehreren Ein- und Ausgängen als Komplexknoten bezeichnet (vgl. [Gro84]; [Gud10]). Die Begriffe Verzweigungs- und Verteilelement werden im Folgenden synonym verwendet. Der Typ des Knotens wird dabei als 2-Tupel unter Angabe der n Eingangs- bzw. m Ausgangspunkte in der Form (n,m) angegeben. Entscheidend ist dies für die Auswahl der geeigneten Berechnungsmethode für die Leistungsbetrachtung.

2.1 KLASSISCHE DURCHSATZBERECHNUNG

Die klassische Durchsatzberechnung eignet sich für irreduzible Knoten des Typs $(1,1)$ und berechnet den

Durchsatz λ über den mittleren Stückgutabstand s und die mittlere Fördergeschwindigkeit v wie folgt [AF09]:

$$\lambda = \frac{v}{s} \left[\frac{1}{ZE} \right] \quad (1)$$

Unter Berücksichtigung der physikalischen Zusammenhänge von Weg, Geschwindigkeit und Zeit lässt sich der Abstand s aus (1) in einen zeitlichen Objektabstand umrechnen. Dieser wird als (mittlere) Zwischenankunftszeit t_{ZAZ} bezeichnet. Damit ergibt sich der Durchsatz als (vgl. [Gud75]):

$$\lambda = \frac{1}{t_{ZAZ}} \left[\frac{1}{ZE} \right] \quad (2)$$

Die zuvor beschriebenen Zusammenhänge sind elementar für alle weiteren Betrachtungen, da sich mit ihnen, teilweise in abgewandelter Form, Grundlagen für die notwendigen Berechnungen ermitteln lassen.

2.2 GRENZLEISTUNGSRECHNUNG

Die Methoden aus dem Bereich der Grenzleistungsrechnung können auf alle Knoten angewendet werden, bei denen die Objekte um die Belegung eines Konfliktbereichs konkurrieren. Die Basis bildet die Berechnung des Auslastungsgrades ρ , der den tatsächlichen Durchsatz λ ins Verhältnis zum maximalen Durchsatz (Grenzdurchsatz) μ setzt (vgl. [AF09]; [Gro84]; [Gud10]):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (3)$$

Dieser allgemeine Zusammenhang lässt sich schrittweise detaillieren. Wird allgemein ein Knoten mit n Eingängen und m Ausgängen betrachtet, bilden sich insgesamt $k = n \cdot m$ Teilströme, die den Knoten durchlaufen. Für jeden dieser Teilströme lässt sich eine partielle Grenzleistung μ_i bestimmen, die sich aus dem minimalen Zeitabstand $t_{ZAZ_{0,i}}$ von zwei Objekten des Teilstroms i bei ausschließlicher Belastung des Knotens durch diesen ergibt (vgl. [AF09]; [Gud75]; [Gro84]):

$$\mu_i = \frac{1}{t_{ZAZ_{0,i}}} \quad (4)$$

Wenn nun f den von der Abfertigungsstrategie abhängigen Anteil der Auslastung des Knotens durch den Wechsel der Stromrichtung angibt, lässt sich aus (4) das allgemeine Materialflussgesetz wie folgt formulieren [Gro84]:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\mu_i} + f \leq 1 \quad (5)$$

Dies bedeutet, dass der Knoten durch die einzelnen Ströme und die beim Wechsel der Stromrichtung anfallenden Schaltprozesse maximal zu 100% ausgelastet werden kann. Dieser Zusammenhang lässt sich in Abhängigkeit des Objektdurchlaufs durch den Knoten und der Abfertigungsstrategie zu den speziellen Materialflussgesetzen weiter entwickeln. Im Folgenden wird der stetige Objektdurchlauf bei stochastischer Abfertigungsstrategie betrachtet. Für die anderen Fälle sei an dieser Stelle auf [Gud75], [Gud76a], [Gro84] und [AF09] verwiesen. Die folgende Formel (6) beschreibt die in [Gud76a] hergeleitete Formel für den Fall der stetigen, stochastischen Abfertigung in abgewandelter, allgemeiner Form mit vereinheitlichten Indizes:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\mu_i} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_i \cdot \lambda_j}{\lambda} \cdot z_{ij} \leq 1 \quad (6)$$

Der Unterschied zwischen (5) und (6) besteht darin, dass der allgemein formulierte Anteil für Schaltvorgänge f durch die bedingten Wahrscheinlichkeiten des Schaltens von i nach j und des dabei auftretenden Verlustes z_{ij} ersetzt ist. Im Gegensatz zur klassischen Durchsatzberechnung wird folglich die stochastische Ankunftsreihenfolge der Objekte betrachtet. Wie bereits zuvor beschrieben, beschränken sich die weiteren Ausführungen auf die Betrachtung von Verzweigungselementen. Für die Korrektheit von (6) wird vorausgesetzt, dass erst bei Ankunft des Objekts festgestellt wird, in welche Richtung das Objekt zu fördern ist und ein möglicherweise erforderlicher Umschaltvorgang erst zu diesem Zeitpunkt ausgelöst wird. Dies spiegelt sich in der konstanten Verlustzeit z_{ij} wider. Im Hinblick auf reale Systeme erscheint dies weniger sinnvoll, da üblicherweise die Identifikation in ausreichendem Abstand vor dem Konfliktpunkt erfolgt. Insofern kann der Knoten die erforderlichen Schaltvorgänge bereits durchführen, sobald das letzte Objekt den Knoten verlassen hat. Obwohl der technische Prozess innerhalb des Knotens festen Zeiten unterliegt, ist aus Sicht des ankommenden Objektes die Abfertigungszeit variabel und damit abhängig vom Zeitpunkt seiner Ankunft. Nur im Falle der maximalen Auslastung kann der Knoten praktisch nicht vorausschauend schalten, da die hierzu notwendigen Leerlaufzeiten fehlen. Dieser Umstand lässt sich später zur Bestimmung eines sinnvollen Betrachtungsintervalls von Zwischenankunftszeiten für die Untersuchung des Stauverhaltens nutzen.

2.3 WARTESCHLANGENTHEORIE

Im Gegensatz zu den zuvor vorgestellten Verfahren, die im Wesentlichen auf Berechnungen mit Mittelwerten basieren, ermöglicht die Warteschlangentheorie die Berücksichtigung von dynamischen Effekten mit Hilfe von statistischen Verteilungsfunktionen. Hierzu wird der Warteprozess in einem Wartesystem als Ergebnis des Zusammenwirkens von Ankunftsprozess und Bedienprozess be-

schrieben [AF09]. Neben der Beschreibung dieser beiden Prozesse sind zur Charakterisierung der Eigenschaften eines Wartesystems mindestens die Angabe der parallelen Bedienstationen und der Bedienstrategie notwendig. Auf diesen vier Parametern basiert die Notation von Wartesystem-Modellen nach Kendall, wobei die jeweilige Ausprägung typischerweise durch Abkürzungen angegeben wird (vgl. [AF09]). Die Grundidee der Warteschlangentheorie lässt sich anhand des $M|M|1|Fifo$ -Modells nachvollziehen, welches in [AF09] ausführlich beschrieben wird und von exponential-verteilten Ankunfts- und Bedienzeiten ausgeht. Typischerweise mit Hilfe der Warteschlangentheorie berechnete Kennwerte eines Wartesystems sind die Auslastung, die mittlere Anzahl Objekte in der Warteschlange und im Wartesystem sowie die mittleren Verweilzeiten in der Warteschlange oder dem Wartesystem (vgl. [AF09]; [Gud76b]). Während bei den grundlegenden Betrachtungen einzelne Wartesysteme isoliert betrachtet werden, erweitert [Ral98] die Anwendung auf vollständige Materialflusssysteme, in dem er Warteschlangennetzwerke bzw. sog. Blockiernetze einsetzt. Damit lässt sich für bestimmte Konstellationen der Eingangsparameter der Durchsatz eines Netzes berechnen. Insgesamt besitzen die dort vorgestellten Zusammenhänge eine hohe mathematische Komplexität, insbesondere wenn der Ankunfts- oder der Bedienprozess keiner Exponentialverteilung genügen. Auch wenn nach [Ral98] in vielen Fällen der Ankunftsprozess in Materialflusssystemen exponentialverteilt vorliegt, kann es aufgrund der verwendeten Materialflusstechnik und der Lastsituation zu getakteten Strömen kommen. Die ist beispielsweise hinter Zusammenführungselementen oder auf Strecken der Fall, auf denen Objekte auf den technisch bedingten Mindestabstand zusammengefahren werden können. Getaktete Ströme bzw. die für sie charakteristische konstante Zwischenankunftszeit können mit Hilfe einer sog. Dirac-Verteilung beschrieben werden, die in der Notation von Wartesystemen mit D abgekürzt werden [AF09]. Das Staurisiko ist bei getakteten Strömen am höchsten, da Verzögerungen hier nicht durch schwankende Zwischenankunftszeiten kompensiert werden können. Weiterhin problematisch in Bezug auf die Anwendung der Warteschlangentheorie für Materialflussknoten ist, je nach Konstellation, die Bestimmung der Bedienzeitverteilung, genauer ihres Mittel- bzw. Erwartungswerts und ihrer Standardabweichung, die zur Abbildung von generalisierten, allgemeinen Verteilungen (abgekürzt mit G) notwendig sind (vgl. [AF09]; [Gud76b]). Eine solche Verteilung der Bedienzeit ergibt sich, wenn die im vorherigen Abschnitt beschriebene Annahme berücksichtigt wird, dass der Knoten vorausschauend seine Leerzeiten für notwendige Umschaltprozesse nutzen kann. Die für die Verwendung von generalisierten Verteilungen vorgestellten Zusammenhänge gehen davon aus, dass sowohl der Erwartungswert als auch die Standardabweichung bekannt sind. Während sich der Mittelwert unter bestimmten Voraussetzungen approximieren lässt, ist eine Bestimmung der Standardabweichung der Bedienzeit ohne Auswertung von Real- oder Simulations-

daten nicht möglich. Wird trotzdem davon ausgegangen, dass alle notwendigen Größen bekannt sind, lässt sich das für den beschriebenen Fall der vorausschauenden Umschaltung bei getakteter Ankunft ergebende Wartesystem-Modell des Typs $D|G|1$ zwar mit den in [Gud76b] vorgestellten Methoden beschreiben. Die notwendige Voraussetzung der Unabhängigkeit von Ankunfts- und Bedienprozess ist in diesem Fall jedoch nicht gegeben. Im Hinblick auf die Zielsetzung, der Ermittlung der Anzahl der verzögerten Materialflussobjekte, die sich aus der in [Gud76b] beschriebenen Rückstauwahrscheinlichkeit ergibt, lässt sich durch einfache praktische Versuche nachweisen, dass sich keine verwertbaren Ergebnisse ermitteln lassen. An späterer Stelle wird deutlich, dass ein Knoten mit einer Auslastung von 70% keine Stauwahrscheinlichkeit von 70% besitzt bzw. zu 30% staufrei ist.

Aus diesen Gründen wird im Folgenden ein mathematisches Verfahren entwickelt, mit dessen Hilfe die Anzahl der durch Umschaltprozesse in einem Verzweigungselement entstehenden Verzögerungen und die daraus entstehenden Staus approximativ bestimmt werden können. Abschließend sei angemerkt, dass der Beitrag nicht die grundsätzliche Eignung der Warteschlangentheorie zur Abbildung von Materialflusssystemen in Frage stellt, sondern lediglich für den untersuchten Fall keine zufriedenstellende Lösung für das beschriebene Problem gefunden werden konnte.

3 MODELLENTWICKLUNG

Bevor mit der eigentlichen Entwicklung des mathematischen Modells begonnen wird, gilt es, den Begriff des Staus im Sinne dieses Beitrages genauer zu definieren. Prinzipiell beschreibt ein Stau die Verzögerung eines Materialflussobjektes aufgrund des Wartens auf die Abfertigung eines oder mehrerer sich vor ihm befindender Objekte. Unterschieden wird hierbei zwischen stochastischen und systematischen Staus. Erste werden beispielsweise durch stochastische Effekte (Zwischenankunftszeiten, Schaltvorgänge) verursacht, die eine kurzfristige Überlastung des Knotens bedingen. Grundsätzlich ist der Knoten aber in der Lage, innerhalb endlicher Zeit die entsprechende Last abzufertigen, d.h. ein stochastischer Stau löst sich nach endlicher Zeit wieder auf. Im Mittel muss folglich der Zusammenhang aus (5) bzw. (6) erfüllt sein. Andernfalls handelt sich um einen systematischen Stau. Dieser wird durch (systematische) Überlastung des Knotens verursacht und hat einen unendlich anwachsenden Stau zur Folge. Systematische Staus müssen folglich für den sinnvollen Betrieb eines Materialflussknotens vollkommen ausgeschlossen werden. Wird davon ausgegangen, dass p_i den Anteil des Teilstromes i am Gesamtstrom λ beschreibt, ergibt sich der Teilstrom λ_i durch folgenden Zusammenhang:

$$\lambda_i = p_i \cdot \lambda \quad (7)$$

Werden die die Zusammenhänge (2) und (7) in (6) eingesetzt und der sich ergebenden Term gleich eins gesetzt (entspricht einer Auslastung von 100%), lässt sich dieser zur minimal zulässigen Zwischenankunftszeit $t_{ZAZ_{min}}$ bei stetiger, stochastischer Abfertigung auflösen (vgl. [Sad07]):

$$t_{ZAZ_{min}} = \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{\mu_i} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i \cdot p_j \cdot z_{ij} \quad (7)$$

Der beim Umschalten des Knotens von Teilstrom i zu Teilstrom j auftretende Verlust z_{ij} setzt sich nach [Gro84] aus der Summe der Zeit für den eigentlichen Umschaltprozess t_{ij}^{ums} und der Zeit für das Erreichen des Ausgangspunktes der Richtung j t_j^{bel} abzüglich des minimalen Zeitabstandes zweier Objekte des Teilstroms j , hier als $t_{ZAZ_{0,j}}$ bezeichnet, zusammen. Für die weiteren Betrachtungen wird davon ausgegangen, dass t_j^{bel} dem minimalen Abstand $t_{ZAZ_{0,j}}$ entspricht und der Verlust damit alleine aus dem technischen Schaltprozess resultiert ($z_{ij} = t_{ij}^{ums}$). Die Abfertigungszeit für ein Objekt kann demnach maximal der Summe aus t_{ij}^{ums} und $t_{ZAZ_{0,j}}$ entsprechen. Das Minimum der Abfertigungszeit liegt bei $t_{ZAZ_{0,j}}$, was der Zeit bei Erreichen der partiellen Grenzleistungen entspricht. Der Zusammenhang (7) ermöglicht folglich die Ermittlung der unteren Intervallgrenze für die Untersuchung von stochastischen Staus ermitteln. Zur Ermittlung einer sinnvollen oberen Grenze sind weitergehende Überlegungen notwendig, die im Folgenden angestellt werden.

3.1 GRUNDKONZEPT

Grundlage für das entwickelte Modell ist die Annahme, dass die Bildung von stochastischen Staus im Wesentlichen vom Zusammenwirken der Objektreihenfolge und den daraus resultierenden Umschaltvorgängen sowie dem Verhältnis von Zwischenankunfts- und Abfertigungszeiten abhängt, wobei letztere unmittelbar durch die Umschaltvorgänge beeinflusst wird. Wie zuvor bereits beschrieben, wird eine konstante Zwischenankunftszeit vorausgesetzt. Dadurch wird die Überlagerung mehrerer stochastischer Effekte vermieden bzw. auf die Betrachtung der stochastischen Ankunftsreihenfolge beschränkt. Die minimalen Zeitabstände sowie die auftretenden Schaltzeiten seien für alle Teilströme gleich. Wird zunächst von einem staufreien Zustand des Knotens aus, ergibt sich aus der konstanten Zwischenankunftszeit t_{ZAZ} und der minimalen Abfertigungszeit t_{ZAZ_0} ein zeitlicher Puffer t_{puffer} , der für Umschaltvorgänge zur Verfügung steht, ohne dass nachfolgende Objekte hierdurch verzögert werden:

$$t_{puffer} = t_{ZAZ} - t_{ZAZ_0} \quad (8)$$

Der Zusammenhang (8) beschreibt dabei den Maximalwert, den t_{puffer} annehmen kann. Jeder Schaltvorgang verursacht einen Zeitverlust bzw. eine Reduktion des zur Verfügung stehenden Zeitpuffers, der ebenfalls von der Zwischenankunftszeit, der minimalen Abfertigungszeit und der Umschaltzeit abhängt:

$$t_{ver} = \min(t_{ZAZ} - t_{ZAZ_0} - t_{ums}; 0) \quad (9)$$

Dieses Minimum sorgt dafür, dass bei ausreichend großer Zwischenankunftszeit keine Verluste auftreten. Praktisch bedeutet dies, dass in diesen Fällen die Zeitspanne immer ausreicht, um eine Schaltung ohne Verzögerung eines Objektes durchführen zu können und somit kein Verlust auftritt. Die Begrenzung von (9) auf den Wert null stellt eine sinnvolle obere Schranke für t_{ZAZ} für die weiteren Untersuchungen dar. Der Funktionswert von t_{ver} ist durch diese Betrachtung immer negativ.

Mit Hilfe von (8) und (9) lässt sich ein funktionaler Zusammenhang aufstellen, mit dem die kumulierte Verzögerung $T(x)$ nach x hintereinander durchgeführten Umschaltvorgängen ermittelt werden kann:

$$T(x) = t_{puffer} + x \cdot t_{ver} \quad (10)$$

Sobald die Funktion einen negativen Wert annimmt, bedeutet dies, dass das nächste eintreffende Objekt sich vor dem Knoten staut. Wird im Anschluss an eine Folge von Schaltungen nicht geschaltet, sorgt dies dafür, dass der Zeitpuffer wieder aufgebaut wird. Dabei sorgt jedes nicht schaltende Objekt für einen Zeitgewinn t_{gew} :

$$t_{gew} = t_{ZAZ} - t_{ZAZ_0} \quad (11)$$

Dieser ist formal identisch zum Zeitpuffer aus (8). Im weiteren Verlauf ist es jedoch notwendig, die beiden Größen voneinander unterscheiden zu können, da (8) nur für den Fall gilt, dass sich der betrachtete Knoten im staufreien Ausgangszustand befindet. Die Tatsache, dass ein Objekt nicht schaltet und damit einen Zeitgewinn erzeugt, bedeutet jedoch unmittelbar, dass das betreffende Objekt nicht gestaut wird. Mit Hilfe von (9) und (10) lässt sich die Anzahl der sich stauenden, schaltenden Objekte $n_{staus}(x)$ in Abhängigkeit von der Gesamtzahl der in Folge schaltenden Objekte x wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} n_{staus}(x) &= \max\left(\left\lfloor \frac{T(x)}{t_{ver}} \right\rfloor; 0\right) \\ &= \max\left(\left\lfloor \frac{t_{puffer}}{t_{ver}} + x \right\rfloor; 0\right) \end{aligned} \quad (12)$$

Das Abrunden ist erforderlich, da diskrete (nicht teilbare) Objekte betrachtet werden. Das Maximum bewirkt, dass nur der negative Wertebereich von (10) berücksich-

tigt wird, da es keinen negativen Stau gibt. Im nächsten Schritt kann entsprechend die Zahl der folgenden (nicht schaltenden) Objekte¹ $n_{stau_f}(x)$ ermittelt werden, die aufgrund der vorherigen Schaltungen x bis zum Auflösen des Staus durch diesen verzögert werden:

$$n_{stau_f}(x) = \max\left(-\frac{T(x)}{t_{gew}}; 0\right) \quad (13)$$

Die Negation des inneren Terms bewirkt lediglich, dass das Endergebnis ein positives Vorzeichen besitzt. Maximum und Aufrunden sorgen auch hier dafür, dass nur der negative Wertebereich von (10) bzw. diskrete Objekte betrachtet werden. Die Gesamtzahl der sich stauenden Objekte $n_{stau}(x)$ bei x Schaltungen in Folge lässt sich anschließend als Summe von (12) und (13) berechnen:

$$n_{stau}(x) = n_{stau_s}(x) + n_{stau_f}(x) \quad (14)$$

Für alle $1 \leq x \leq \infty \in \mathbb{Z}$ können mit (14) die sich nach x Schaltvorgängen stauenden Objekte ermittelt werden. Diese werden für die weiteren Berechnungen benötigt, idealerweise in Form eines entsprechenden Vektors \vec{n}_{stau} :

$$\vec{n}_{stau} = \begin{pmatrix} n_{stau}(1) \\ \vdots \\ n_{stau}(\infty) \end{pmatrix} \quad (15)$$

Aus praktischen Erwägungen ist die Bestimmung bis zum oberen Grenzwert nicht notwendig. In der Folge wird gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten einer hohen Anzahl von Schaltungen in Folge praktisch bei null liegt. Für die Approximation der sich von einer Gesamtmenge betrachteter Objekte n stauenden Objekte $n_{stau_{ges}}$ muss der Vektor aus (15) mit dem noch zu ermittelnden Wahrscheinlichkeitsvektor \vec{P}_s für das Auftreten einer bestimmten Anzahl schaltender Objekte in Folge und n multipliziert werden:

$$n_{stau_{ges}} = n \cdot (\vec{P}_s \cdot \vec{n}_{stau}) \quad (16)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass das Ergebnis aus (16) von der zuvor in die Gleichungen (8) bis (11) eingesetzten Zwischenankunftszeit t_{ZAZ} abhängt und somit die Notation von (16) den Parameter t_{ZAZ} beinhalten müsste. Hierauf wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

¹ Nicht schaltende Objekte folgen auf ein Objekt desselben Teilstromes, weswegen keine Schaltung erforderlich ist. Sie werden im weiteren Verlauf als folgende Objekte bezeichnet.

3.2 STROMZERLEGUNG

Im nächsten Schritt wird der Vektor \vec{P}_s bestimmt. Hierzu wird der Objektstrom zunächst in zwei disjunkte Mengen von schaltenden und folgenden Objekten zerlegt. Diese Mengen lassen sich weiter in Teilmengen (Pulks) zerlegen, die angeben, wie häufig hintereinander geschaltet bzw. nicht geschaltet wird. Die einzelnen Komponenten $P_s(x)$ des Vektors \vec{P}_s geben schließlich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten einzelner Pulks schaltender Objekte der Länge x an. Die Nomenklatur wird an dieser Stelle bewusst so gewählt, dass die Eintrittswahrscheinlichkeit $P_s(x)$ klar vom Anteil p_i des Teilstromes i am Gesamtstrom unterschieden werden kann. Analog zu $P_s(x)$ kann die Eintrittswahrscheinlichkeit $P_f(x)$ für Pulks von folgenden Objekten der Länge x bestimmt werden. Aus mathematischer Sicht ist dieses Problem einfacher zu formulieren und wird daher zuerst betrachtet. Dafür werden zunächst die notwendigen Bedingungen formuliert und anschließend in ein mathematisches Modell überführt. Um eine scharfe Trennung der beiden Grundmengen zu erreichen, ist es wichtig, die Bedingungen eindeutig zu formulieren. Grundsätzlich müssen für den Fall, dass ein Pulk folgender (nicht schaltender) Objekte auftritt, die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

1. Es muss ein Schaltvorgang stattgefunden haben, d.h. es müssen zwei Objekte unterschiedlicher Teilströme aufeinander folgen. Das hintere Objekt gehöre zur Stromrichtung i .
2. Um x -mal hintereinander nicht zu schalten, müssen direkt dahinter x Objekte derselben Stromrichtung i folgen.
3. Der Pulk der folgenden Objekte endet dadurch, dass das Objekt $x+1$ zu einem anderen Teilstrom gehört.

Die Wahrscheinlichkeit $P_{fi}(x)$ dafür, dass ein Pulk von folgenden Objekten Stromrichtung i auftritt, berechnet sich damit wie folgt:

$$P_{fi}(x) = (1 - p_i)^2 \cdot p_i^{(x+1)} \quad (17)$$

Durch Summation über alle Teilströme k ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit für Pulks der Länge x folgender Objekte beliebiger Stromrichtungen:

$$P_f(x) = \sum_{i=1}^k (1 - p_i)^2 \cdot p_i^{(x+1)} \quad (18)$$

Die Korrektheit des Ergebnisses lässt sich mit Hilfe der Gesamtwahrscheinlichkeit für das Auftreten von zwei Objekten desselben Teilstromes nachweisen, also der Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Schaltvorgang stattfindet. Hierzu muss zunächst die Wahrscheinlichkeit

$P_{f_{\text{einzel},i}}(x)$ dafür ermittelt werden, dass ein einzelnes, beliebiges Objekt des Gesamtstromes zu einem solchen Pulk des Teilstromes i gehört. Diese berechnet sich durch Multiplikation von (17) mit der Pulklänge x :

$$P_{f_{\text{einzel},i}}(x) = x \cdot (1 - p_i)^2 \cdot p_i^{(x+1)} \quad (19)$$

Durch Summation von (19) über alle $1 \leq x \leq \infty$ ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit dafür, dass bei Objekten des Teilstromes i nicht geschaltet werden muss. Es kann gezeigt werden, dass diese unendliche Summe für $|p_i| < 1$ konvergent ist und Folgendes gilt:

$$P_{f_i} = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (1 - p_i)^2 \cdot p_i^{(x+1)} = p_i^2 \quad (20)$$

Der Term p_i^2 stimmt exakt mit der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von zwei gleichen Objekten des Teilstromes i überein. Durch Summation von (20) über alle Teilströme ergibt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit P_f für den Fall, dass nicht geschaltet werden muss:

$$P_f = \sum_{i=1}^k P_{f_i} = \sum_{i=1}^k p_i^2 \quad (21)$$

Vergleichsrechnungen mit (20) zeigen bereits bei vergleichsweise kleinen Endwerten eine gute Annäherung an den exakten Wert. Dadurch, dass jedes Objekt des Gesamtstromes entweder einen Schaltvorgang verursacht oder nicht, kann aus (21) unmittelbar die Wahrscheinlichkeit für einen Schaltvorgang berechnet werden:

$$P_s = 1 - P_f \quad (22)$$

Mit Hilfe von (22) lässt sich in (29) die Richtigkeit der Zusammenhänge für das Auftreten von Pulks mit schaltenden Objekten zeigen. Hierfür müssen jedoch zunächst vergleichbare Regeln wie für die nicht schaltenden Pulks formuliert werden. Ein Pulk von Objekten, bei dem x Schaltvorgänge hintereinander erfolgen, muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Vor Beginn des eigentlichen Pulks schaltender Objekte müssen sich zwei Objekte eines Teilstroms befinden, d.h. es hat kein Schaltvorgang stattgefunden.
2. Damit in der Folge x Schaltvorgänge hintereinander ausgeführt werden, dürfen benachbarte Objekte nicht zur selben Stromrichtung gehören.
3. Das Ende des Pulks bilden zwei Objekte derselben Stromrichtung, d.h. es wird auch hier nicht geschaltet.

Die Bedingungen 1 und 3 sorgen dafür, dass eine Zerlegung des Stromes in eindeutige Teilmengen erfolgt.

Ohne diese Anfangs- und Endbedingungen können einzelne Objekte fälschlicherweise einem zu „kurzen“ Pulk zugeordnet werden. Die mathematische Formulierung des Problems, insbesondere von Bedingung 2, ist deutlich komplexer als im zuvor betrachteten Fall. Dies liegt daran, dass hier nicht mit einer konstanten Gegenwahrscheinlichkeit für das jeweils nachfolgende Objekt gerechnet werden kann, sondern diese abhängig von der Stromrichtung des aktuellen Objektes bestimmt werden muss. Um dieses Problem zu veranschaulichen, ist in der folgenden Abbildung beispielhaft ein Baumdiagramm möglicher Objektfolgen für den Fall dargestellt, dass zwei Mal in Folge geschaltet wird, es insgesamt drei Stromrichtungen gibt und die Folge mit zwei Objekten der ersten Richtung beginnt.

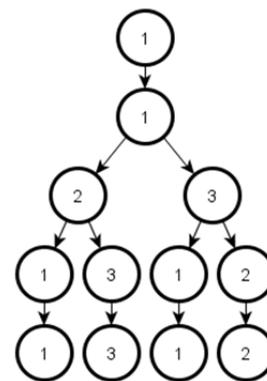


Abbildung 1. Beispielhafte Objektfolge für zweimaliges Schalten bei drei Stromrichtungen

Analog zu Abbildung 1 lassen sich entsprechende Bäume für den Beginn mit den anderen beiden Stromrichtungen erstellen. Wird anstelle der Objekte die Wahrscheinlichkeit p_i für ihr Auftreten in den Baum eingesetzt, entsteht ein Wahrscheinlichkeitsbaum, mit dessen Hilfe die Wahrscheinlichkeit für das zweimalige Schalten in Folge berechnet werden kann. Die Pfadwahrscheinlichkeit beschreibt das Produkt aller an einem Pfad beteiligten Wahrscheinlichkeiten. Die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich schließlich aus der Summe aller Pfadwahrscheinlichkeiten. Um allgemein die Wahrscheinlichkeiten für eine beliebige Anzahl von hintereinander ausgeführten Schaltungen x zu bestimmen, müssen für den jeweiligen Fall alle Wahrscheinlichkeitsbäume aufgestellt und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Der Aufwand hierfür ist selbst bei Programmierung eines entsprechenden Algorithmus vergleichsweise hoch, da die Komplexität der Bäume mit steigendem x exponentiell zunimmt. Aufgrund der Tatsache, dass sich die Wahrscheinlichkeitsbäume für $x+1$ Schaltvorgänge durch geschickte Rekombination der Bäume für x Schaltvorgänge zusammensetzen lassen, kann das Problem durch Entwicklung einer Rekursion gelöst werden. Den Rekursionsanfang $a_i(1)$ beschreibt die folgende Gleichung mit $x = 1$ und i als Index für den jeweiligen Teilstrom ($1 \leq i \leq k$):

$$a_i(1) = p_i \cdot \left[\left(\sum_{j=1}^k p_j^2 \right) - p_i^2 \right] \quad (23)$$

Der Rekursionsschritt wird ebenfalls für alle Teilströme j berechnet und gilt für alle $x > 1$:

$$a_i(x) = p_i \cdot \left[\left(\sum_{j=1}^k a_j(x-1) \right) - a_i(x-1) \right] \quad (24)$$

Die Wahrscheinlichkeit $P_{s_i}(x)$ des Auftretens eines Pulks von schaltenden Objekten der Länge x berechnet sich durch Multiplikation des jeweiligen Funktionswertes der Rekursion mit der Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Stromrichtung i wie folgt:

$$P_{s_i}(x) = a_i(x) \cdot p_i \quad (25)$$

Praktisch kann die Anwendung der Zusammenhänge (23) bzw. (24) und (25) beschrieben werden, indem der jeweilige Wahrscheinlichkeitsbaum der vorherigen Stufe aufgetrennt wird und nach Hinzufügen einer weiteren Ebene über Kreuz mit sich ergebenden Teilbäumen kombiniert wird. Aus (25) lässt sich durch Summation über alle Teilströme die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Pulks von schaltenden Objekten der Länge x berechnen:

$$P_s(x) = \sum_{i=1}^k a_i(x) \cdot p_i \quad (26)$$

Die Wahrscheinlichkeit $P_{s_{\text{einzel},i}}(x)$, dass ein beliebiges Objekt des Gesamtstromes sich in einem Pulk schaltender Objekte der Stromrichtung i der Länge x befindet, berechnet sich durch Multiplikation von (25) mit der Pulklänge x :

$$P_{s_{\text{einzel},i}}(x) = x \cdot a_i(x) \cdot p_i \quad (27)$$

Durch Summation von (27) über alle $1 \leq x \leq \infty$ berechnet sich die Gesamtwahrscheinlichkeit P_{s_i} . Diese drückt aus, dass bei Objekten des Teilstromes i geschaltet werden muss:

$$P_{s_i} = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot a_i(x) \cdot p_i \quad (28)$$

Aus der Summe von (28) über alle Teilströme ergibt sich schließlich die Gesamtwahrscheinlichkeit P_s . Dieser Wert beschreibt, dass ein Objekt einen Schaltvorgang durchführt:

$$P_s = \sum_{i=1}^k P_{s_i} = 1 - P_f \quad (29)$$

Aufgrund der Rekursion kann der formale, mathematische Beweis für die Gleichheit an dieser Stelle nicht unmittelbar geführt werden. In diesem Fall ergibt sich ebenfalls bei Vergleichsrechnungen mit (28) bereits bei relativ kleinen Endwerten eine beliebig nahe Annäherung an (29).

Der für die weiteren Berechnungen benötigte Vektor \vec{P}_s wird durch systematisches Einsetzen von Werten für $1 \leq x \leq \infty$ in (26) ermittelt:

$$\vec{P}_s = \begin{pmatrix} P_s(1) \\ \vdots \\ P_s(\infty) \end{pmatrix} \quad (30)$$

Da $P_s(x)$ für $x \rightarrow \infty$ gegen null strebt, lässt sich eine sinnvolle Obergrenze für x dadurch bestimmen, dass eine tolerierbare Abweichung zwischen der linken und rechten Seite von (29) bestimmt wird. Im schlechtesten Fall, d.h. bei der höchsten Gesamtwahrscheinlichkeit für das Schalten, liegt die Abweichung bei einem Endwert von $x = 30$ in (28) bereits deutlich unterhalb von 1 Promille.

3.3 APPROXIMATION STAUENDER OBJEKTE

Die in den vorherigen Abschnitten hergeleiteten Zusammenhänge ermöglichen die konkrete Berechnung der Gesamtzahl sich stauender Objekte mit Hilfe von (16). Auf dieser Basis angestellte Vergleiche mit durch ereignisdiskrete Simulation erzeugten Objektfolgen haben gezeigt, dass insbesondere in Bereichen hoher Auslastung des Knotens deutliche Abweichungen zwischen Berechnung und Simulation existieren. Die Berechnung ermittelt dabei deutlich zu wenig stauende Objekte. Diese lassen sich darauf zurückführen, dass bei der Berechnung der stauenden Objekte in (12) und (13) davon ausgegangen wird, dass bei Beginn der Schaltvorgänge kein Stau existiert und somit der Zeitpuffer t_{puffer} vollständig genutzt werden kann bzw. nach Ende der Schaltungen wieder vollständig aufgebaut wird. Zum besseren Verständnis wird im Folgenden die Entwicklung des Zeitpuffers in Abhängigkeit der eintreffenden Objekte grafisch dargestellt. Die gewählten Parameter entsprechen denen aus Szenario 1 in Abschnitt 4.1. Abbildung 2 auf der nächsten Seite zeigt das Verhalten beispielhaft für fünf Schaltvorgänge in Folge. Die Anzahl stauender Objekte gemäß der Zusammenhänge (12) bis (14) lässt sich aus der grafischen Darstellung direkt entnehmen, da ein negativer Zeitpuffer gleichbedeutend mit der Verzögerung des jeweiligen Objektes ist. Die auf diese Weise ermittelte Anzahl stellt gleichzeitig das Minimum der sich stauenden Objekte und damit den besten zu erwartenden Fall dar.

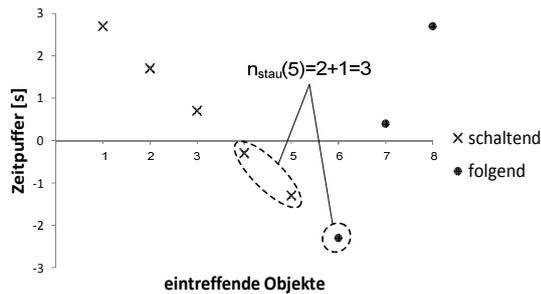


Abbildung 2. Entwicklung des Zeitpuffers in Abhängigkeit der eintreffenden Objekte bei fünf Schaltvorgängen und maximalem Zeitpuffer ($t_{puffer} = \max$.)

Mit zunehmender Auslastung des Knotens steigt jedoch die Wahrscheinlichkeit, dass während eines bestehenden Staus ein Pulk schaltender Objekte am Knoten eintrifft und somit der Zeitpuffer nicht oder nur teilweise zur Verfügung steht. Dabei können, abhängig von der individuellen Objektreihenfolge des ankommenden Stromes, praktisch beliebig viele Fälle eintreten. Um diese Fälle mathematisch beschreibbar zu machen, wird versucht, sie auf einen besten und einen schlechtesten Fall zu reduzieren und über eine prozentuale Gewichtung dem „realen“ Fall anzunähern. Zur Beschreibung des schlechtesten Falls können ebenfalls (12) und (13) verwendet werden, indem $t_{puffer} < 0$ gesetzt wird. Die folgende Abbildung 3 zeigt die Entwicklung des Zeitpuffers in Abhängigkeit der eintreffenden Objekte für fünf Schaltungen in Folge, wobei beispielhaft $t_{puffer} = -0,2$ gesetzt wurde. Dies entspricht einem zu Beginn der Schaltserie noch negativen Zeitpuffer aufgrund von vorherigen Staus.

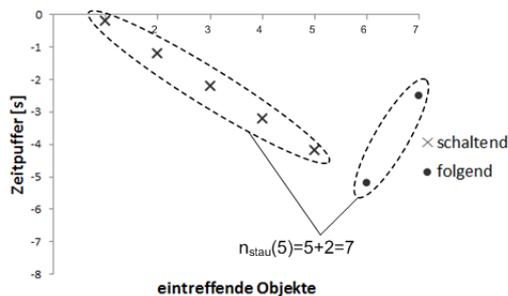


Abbildung 3. Entwicklung des Zeitpuffers in Abhängigkeit der eintreffenden Objekte bei fünf Schaltvorgängen und Zeitpuffer < 0 am Beispiel $t_{puffer} = -0,2$

Dieser Fall gilt für alle Fälle, bei denen sich bereits Objekte gestaut haben, unabhängig von ihrer Anzahl. Anders gesagt vergrößert sich die Anzahl stauender Objekte bei bereits bestehendem Stau immer im gleichen Maße. Dies soll die folgende Abbildung 4 noch einmal verdeutlichen. Sie zeigt die Entwicklung der Pufferzeit in Abhängigkeit der eintreffenden Objekte bei zwei Schaltserien von jeweils fünf Schaltvorgängen. Zu Beginn der ersten Schaltserie beträgt der Zeitpuffer $t_{puffer} = -0,2$. Zu Beginn der zweiten Schaltserie beträgt $t_{puffer} = -2,5$. Es wird folg-

lich bei bestehendem Stau erneut geschaltet. Prinzipiell entspricht dies der zweifachen Ausführung des in Abbildung 3 dargestellten Falles mit dem Unterschied, dass zu Beginn der zweiten Ausführung t_{puffer} deutlich kleiner ist. Wie aus dem Vergleich der Abbildungen 3 und 4 ersichtlich ist, ergibt dies in der Gesamtzahl der stauenden Objekte keinen Unterschied.

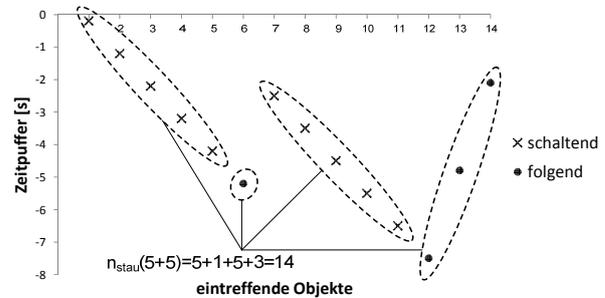


Abbildung 4. Entwicklung des Zeitpuffers in Abhängigkeit der eintreffenden Objekte bei zweimal fünf Schaltvorgängen und $t_{puffer} = -0,2$ bzw. $t_{puffer} = -2,5$

Aufgrund der Gestalt der zugrunde liegenden Zusammenhänge (12) und (13) kann zudem gezeigt werden, dass mit Hilfe von $t_{puffer} = 0$ die korrekte Anzahl stauender Objekte für alle Fälle von $t_{puffer} < 0$ ermittelt werden kann. Rechnerisch lassen sich damit alle Fälle für $t_{puffer} < 0$ auf den Fall $t_{puffer} = 0$ reduzieren. Für Werte von $t_{puffer} > 0$ lässt sich eine vergleichbare Reduktion nicht durchführen. Lediglich der Fall, dass der maximale Puffer gemäß (8) zur Verfügung steht, ist als bester Fall von den anderen Fällen klar unterscheidbar. In der Realität wird die sich ergebende Anzahl gestauter Objekte zwischen dem besten und dem schlechtesten Fall liegen, was im Folgenden auf das mathematische Modell übertragen wird. Der Faktor p_r sei dabei in der Realität vergleichbar mit der Wahrscheinlichkeit, dass während eines bestehenden Staus eine neue Serie von Schaltungen beginnt. Weiterhin sei $n_{stau}^+(x)$ die Anzahl der sich im besten Fall stauenden Objekte, was das zu erwartende Minimum darstellt. Zur Bestimmung mit Hilfe von (14) wird die Pufferzeit nach (8) in die Zusammenhänge (12) bzw. (13) eingesetzt.

Die sich im schlechtesten Fall stauenden Objekte bei x Schaltungen in Folge seien mit $n_{stau}^-(x)$ beschrieben. Die Ermittlung erfolgt an dieser Stelle analog, wobei die Pufferzeit in (12) bzw. (13) gleich null gesetzt wird. Beide Größen können, wie für den allgemeinen Fall in (15) dargestellt, in Vektorform dargestellt werden. Die Gesamtzahl der sich stauenden Objekte ergibt sich damit durch Erweiterung von (16) wie folgt:

$$n_{stau_{ges}} = n \cdot [\vec{P}_s \cdot (p_r \cdot \vec{n}_{stau}^- + (1 - p_r) \cdot \vec{n}_{stau}^+)] \quad (30)$$

Der Faktor p_r ist dabei noch unbekannt und kann bisher durch praktische Experimente approximiert werden. Um einen allgemeingültigen, funktionalen Zusammenhang für p_r zu finden, wird eine gezielte Variation der relevanten Eingangsgrößen durchgeführt. Anstelle der Zwischenankunftszeit wird bei der Suche des funktionalen Zusammenhanges der Betrag des Schaltverlust $|t_{ver}|$ als Argument genutzt, da dieser als relativer Wert aus den übrigen Parametern gebildet wird. Hierbei hat sich gezeigt, dass Potenzfunktionen der folgenden Gestalt für die Beschreibung von p_r eine mögliche Näherung liefern:

$$p_r(t_{ver}) = a \cdot (t_{ver})^b \quad (31)$$

Die Parameter a und b bestimmen dabei Lage und Krümmung der Funktion und ermöglichen damit die Anpassung des Verlaufs an die experimentell ermittelten Werte. Problematisch bei dieser Anpassung ist jedoch, dass der für p_r experimentell ermittelte Verlauf je nach Eingangsparametern Sprungstellen bzw. ein nicht monotonen Verhalten aufweist. Diese sind mathematisch darauf zurückzuführen, dass innerhalb der Vektoren \vec{n}_{stau} an diesen Stellen in den ersten Komponenten ein oder mehrere Nullen wegfallen (vgl. (33), links), d.h. die Anzahl möglicher Schaltungen ohne Verursachen eines Staus wird geringer. In Verbindung mit den vergleichsweise hohen Wahrscheinlichkeiten für kurze Schaltserien ergibt sich damit ein hoher Anstieg der sich stauenden Objekte, der nur durch Senkung von p_r kompensiert werden kann.

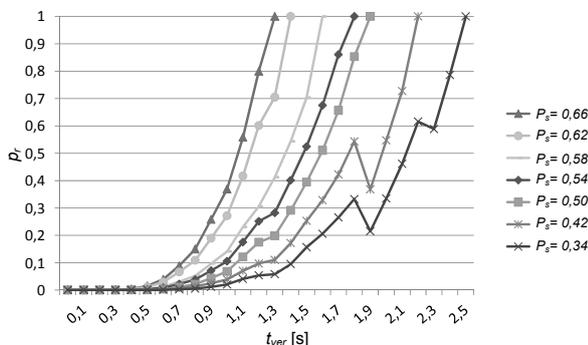


Abbildung 5. Bsp.: Experimentell ermittelter Verlauf von p_r bei Variation von P_s

Dieser Effekt ist in Abbildung 5 bei $P_s=0,42$ und $P_s=0,34$ erkennbar. Die zunächst naheliegende Vermutung, dass sich über die Schaltwahrscheinlichkeit eine sinnvolle Grenze für die Nutzung einer Potenzfunktion als Näherung für p_r formulieren lässt, kann nicht allgemeingültig bestätigt werden. Die eigentliche Ursache ist nicht die Schaltwahrscheinlichkeit selbst, sondern die Tatsache, dass mit abnehmender Schaltwahrscheinlichkeit die Auslastung des Knotens sinkt und damit eine höhere Grenzleistung bzw. geringere Zwischenankunftszeiten realisierbar sind. Übertragen auf die in Abbildung 5 verwendete Verlustzeit können dadurch bei geringeren Schaltwahrscheinlichkeiten kleinere Zwischenankunftszeiten und damit höhere Verlustzeiten auftreten, bevor der Knoten

überlastet wird. Die zuvor beschriebenen Sprungstellen t_{ver}^* ergeben sich rechnerisch wie folgt:

$$t_{ver}^*(x) = \frac{t_{ums}}{(x + 1)} \quad (32)$$

Praktisch bedeutet dies, dass bei Verlustzeit $t_{ver} < t_{ver}^*(x)$ mehr als x Schaltvorgänge zu einer Staubildung führen oder umgekehrt, dass nur bei sehr kleiner Verlustzeit eine hohe Anzahl an Schaltvorgängen nicht zu einer Staubildung führt. Für das Beispiel aus Abbildung 4 ergibt sich eine solche Sprungstelle bei $t_{ver}^*(1)=1,85s$. Für $x>1$ sind die Sprungstellen aufgrund des gewählten Rasters von 0,1s und ihrer marginalen Höhe nicht erkennbar. Mit Hilfe der berechneten Sprungstellen lässt sich prinzipiell innerhalb der stetigen Bereiche eine Funktion für p_r durch (31) mit angepassten Parametern a und b beschreiben. Aus praktischen Gesichtspunkten erscheint es jedoch wichtiger, tendenzielle Aussagen zur Anwendung mathematischen Modells aus Abbildung 5 abzuleiten. Dabei kann der Faktor p_r als notwendige Anpassung zwischen den sich im besten Fall und den sich „tatsächlich“ stauenden Objekten verstanden werden. Übertragen auf Abbildung 5 bedeutet dies, dass für kleine Werte von t_{ver} mit $p_r=0$ vergleichsweise gute Näherungen für die Anzahl stauender Objekte ermittelt werden können. Diese sind umso besser, je geringer die Schaltwahrscheinlichkeit P_s ist. Im Rahmen des folgenden Abschnitts wird dies anhand konkreter Beispiele gezeigt. Für reale Anwendungen kann zudem das zu betrachtende Intervall der Zwischenankunftszeiten deutlich verkleinert werden, da Fälle, in denen sich ein hoher Anteil der Objekte staut, für den Realbetrieb nicht sinnvoll erscheinen. Abschließend lässt sich festhalten, dass mit (30) ein grundsätzlich geeigneter Zusammenhang für die Approximation der Anzahl sich stauender Objekte vor Verzweigungselementen mit getakteter Objektankunft existiert, der unter bestimmten Voraussetzungen die notwendige Ergebnisgüte für die Phase der Grobplanung liefert.

4 BERECHNUNGSBEISPIEL

Die in Kapitel 3 vorgestellten Zusammenhänge werden im Folgenden beispielhaft auf ein stetiges Verzweigungselement angewendet. Dieses teilt einen ankommenden Objektstrom auf drei Teilströme auf. Die für die Berechnungen notwendigen Parameter des Knotens sind in Tabelle 1 auf der nächsten Seite zusammengefasst, wobei zwei unterschiedliche Szenarien untersucht werden.

Tabelle 1. Parameter des Verzweigungselements der Beispiel-Szenarien

| Szenario | p_1 | p_2 | p_3 | t_{ZAZ_0} [s] | t_{ums} [s] |
|----------|-------|-------|-------|--------------------|------------------|
| 1 | 0,5 | 0,4 | 0,1 | 0,8 | 3,7 |
| 2 | 0,8 | 0,1 | 0,1 | 0,8 | 3,7 |

Es werden jeweils $n=100.000$ Objekte betrachtet und aufgrund des Umfangs nur ausgewählte Zwischenergebnisse dargestellt.

4.1 SZENARIO 1

Zunächst lässt sich mit Hilfe von (7) die minimal und mit (9) die maximal zu betrachtende Zwischenankunftszeit berechnen. Daraus ergibt sich das Betrachtungsintervall für den konkreten Fall als $t_{ZAZ} \in [2,946; 4,5]$. Da die Ermittlung der Vektoren \vec{n}_{stau} von der betrachteten Zwischenankunftszeit abhängt, wird dies exemplarisch anhand von $t_{ZAZ}=3,5s$ gezeigt. Entsprechend ergeben sich $t_{puffer}=2,7s$ und $t_{ver}=1,0s$. Damit ergeben sich die Vektoren \vec{n}_{stau}^+ und \vec{n}_{stau}^- wie folgt:

$$\vec{n}_{stau}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ \vdots \\ \infty \end{pmatrix} \quad \vec{n}_{stau}^- = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ \vdots \\ \infty \end{pmatrix} \quad (33)$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit für einen Schaltvorgang P_s beträgt nach (22) 0,58. Mit Hilfe der Zusammenhänge (23) bis (26) lässt sich der benötigte Wahrscheinlichkeitsvektor (30) ermitteln:

$$\vec{P}_s = \begin{pmatrix} 0,0882 \\ 0,0583 \\ 0,033178 \\ 0,020435 \\ 0,01195362 \\ 0,00725327 \\ 0,00428395 \\ 0,00258159 \\ \vdots \\ \approx 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Für die weiteren Berechnungen wird die Anzahl der maximalen Schaltungen in Serie auf 30 begrenzt. Dies führt im konkreten Fall bei P_s zu einer Abweichung von $1 \cdot 10^{-7}$. Damit lässt sich nun die Anzahl sich stauender Objekte ermitteln. Das Minimum ergibt sich durch Einsetzen von $p_r=0$ in (30) zu:

$$n_{stau_{ges}} = n \cdot [\vec{P}_s \cdot \vec{n}_{stau}^+] = 23.169 \quad (35)$$

Bezogen auf die Gesamtzahl der betrachteten Objekte stauen sich folglich mindestens 23%. Im Vergleich zur experimentell ermittelten Anzahl der sich stauenden Objekte von 32.599 ist dies eine Abweichung von ca. 10%. Durch eine Funktionsanpassung konnte für Szenario 1 die folgende Funktion als geeignete Approximation für p_r bestimmt werden:

$$p_r(t_{ver}) = 0,155 \cdot (t_{ver})^{3,73} \quad (36)$$

Mit $t_{ver}=1,0s$ nach (9) ergibt sich $p_r=0,155$. Wird dies in (30) eingesetzt, berechnet sich die Gesamtzahl sich stauender Objekte wie folgt:

$$n_{stau_{ges}} = n \cdot [\vec{P}_s \cdot (0,155 \cdot \vec{n}_{stau}^- + (0,845) \cdot \vec{n}_{stau}^+)] = 33.791 \quad (37)$$

Somit entsteht gegenüber dem experimentell ermittelten Wert lediglich ein Fehler von ca. 1%. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Approximation über alle betrachteten Zwischenankunftszeiten durchgeführt wurde und sich, je nach eingesetztem Wert, Abweichungen nach oben oder unten ergeben können. Bezogen auf die Gesamtzahl sich stauender Objekte kommt es innerhalb des betrachteten Intervalls bei Berechnung der Mindestanzahl zu Abweichungen von bis zu 50%, bei Nutzung der Approximation von bis zu 2%. Abbildung 6 stellt die Entwicklung der Anzahl stauender Objekte in Abhängigkeit der Zwischenankunftszeit grafisch dar. Es ist ersichtlich, dass die Abweichung zwischen dem mit Hilfe von (35) berechneten Minimum und der Approximation gemäß (37) mit steigender Zwischenankunftszeit immer geringer wird. Für $t_{ZAZ} \geq 3,7s$ ergibt sich eine Abweichung unterhalb von 5%. Dies ist für eine Grobplanung von ausreichender Genauigkeit ist. Wird aus den Zwischenankunftszeiten die rechnerische Auslastung des Knotens gemäß (6) ermittelt, entspricht dies einem Bereich $<80\%$, der bei realen Anwendungen im Normalfall nicht überschritten wird.

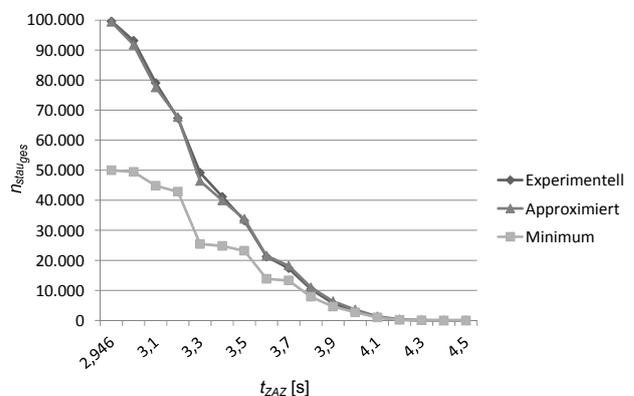


Abbildung 6. Gesamtzahl sich stauender Objekte Szenario 1

Ein Anteil sich stauender Objekte oberhalb von 20% erscheint zudem für reale Anwendungen ebenfalls nicht sinnvoll.

4.2 SZENARIO 2

Das zweite Szenario unterscheidet sich lediglich durch eine veränderte Aufteilung des Gesamtstroms auf die einzelnen Teilströme. Es wird so verändert, dass ein Teilstrom dominant und die Schaltwahrscheinlichkeit dadurch vergleichsweise gering ist. Für Szenario 2 kann durch die stark ausgeprägten Sprungstellen von p_r keine geeignete Approximation gefunden werden. Aus diesem Grund wird lediglich die minimale Anzahl sich stauender Objekte mit $p_r=0$ analog zu Abschnitt 4.1 ermittelt. Alle weiteren Zwischenschritte werden entsprechend Abschnitt 4.1 durchgeführt. Diese ist in Abbildung 7 in Abhängigkeit der Zwischenankunftszeit dargestellt.

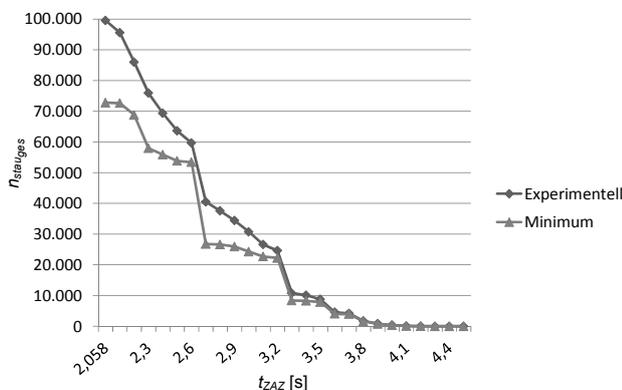


Abbildung 7. Gesamtzahl sich stauender Objekte Szenario 2

Das Betrachtungsintervall ist in diesem Fall größer, da sich aufgrund der geringeren Schaltwahrscheinlichkeit kleinere Zwischenankunftszeiten realisieren lassen ($t_{ZAZ} \in [2,058; 4,5]$). Aus Abbildung 7 ist ersichtlich, dass die Abweichungen insgesamt deutlich kleiner sind als bei Szenario 1, prinzipiell aber ebenfalls mit sinkender Zwischenankunftszeit ansteigen. Die Abbildung zeigt jedoch auch, dass die ermittelten Werte für $t_{ZAZ} \geq 3,0s$ eine gute Näherung darstellen. In diesem Bereich sind die Abweichungen $< 7\%$, wobei die Auslastung des Knotens bei etwa 70% liegt. Die Problematik bei der Approximation aufgrund der Sprungstellen ist ebenfalls sichtbar. Abschließend lässt sich festhalten, dass bei diesem Szenario ebenfalls die Gesamtzahl der sich stauenden Objekte für eine Zwischenankunftszeit im Realbetrieb deutlich oberhalb von 3,0s spricht. Für diesen Bereich konnte gezeigt werden, dass das entwickelte Verfahren für die Grobplanung ausreichend genaue Werte liefert.

5 ZUSAMMENFASSUNG UND FAZIT

Im Rahmen des Beitrages wurde ein mathematisches Modell entwickelt, dass die Gesamtzahl der sich stauenden Objekte vor einem stetigen Verzweigungselement bei

getakteter Objektankunft beschreibt. Das in diesem Rahmen entwickelte Verfahren zur Zerlegung des Objektstroms in Serien von schaltenden und nicht-schaltenden Objekten liefert für den Fall zufällig eintreffender Objekte genaue Ergebnisse. Die Verknüpfung der auf diese Weise ermittelten Wahrscheinlichkeiten mit den im jeweiligen Fall sich stauenden Objekten liefert, je nach Kombination der relevanten Kenngrößen, unterschiedlich gute Ergebnisse. Es wurde versucht, diese Güte durch weitere Detaillierung des Modells zu verbessern. Hierbei konnten teilweise sehr gute Ergebnisse erzielt werden. Obwohl das Modell bisher keine Allgemeingültigkeit besitzt, konnte gezeigt werden, dass es für im realen Betrieb relevante Fälle eine ausreichende Ergebnisgüte für die Phase der Grobplanung liefert. Das Verfahren liefert somit einen wichtigen Hinweis auf die Veränderung der Stromcharakteristik von Materialflüssen aufgrund der technischen Prozesse in Materialflusssknoten. Hieraus lassen sich unmittelbar Empfehlungen für die Systemgestaltung ableiten. Falls möglich sollte das Verhältnis von Schalt- und Zwischenankunftszeiten so gewählt werden, dass es gar nicht erst zu Verzögerungen durch Schaltprozesse kommt. Falls dies nicht möglich ist, lassen sich mit Hilfe des Verfahrens sinnvolle Unter- bzw. Obergrenzen für beide Zeiten bestimmen. Im Hinblick auf die Leistungsverfügbarkeit und die damit verbundene Ermittlung von Soll-Laufzeiten liegt der Fokus weiterer Arbeiten auf der Ermittlung der zu erwartenden (zeitlichen) Verzögerungen aufgrund von Staus. Außerdem soll das Stauverhalten vor weiteren, technischen Ausprägungen von Materialflusssknoten, insb. vor Zusammenführungselementen detailliert untersucht werden. Hier gilt es zu prüfen, inwiefern die bestehenden Verfahren auf diesen Fall anwenden lassen oder sich das in diesem Beitrag vorgestellte Verfahren sinnvoll übertragen bzw. adaptieren lässt.

FÖRDERHINWEIS

Die in diesem Beitrag vorgestellten Ergebnisse wurden im Rahmen des Teilprojekts C1 „Analytische Methoden für die Berechnung der Leistungsverfügbarkeit komplexer Materialflusssysteme“ des Paketantrags 672 erarbeitet, der von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG unter Kennzeichen (HO 2403/8-1) gefördert wird.

LITERATUR

- [AF09] Arnold, Dieter; Furmans, Kai: *Materialfluss in Logistiksystemen*. 6. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. – ISBN 978-3-642-01404-8
- [Fur00] Furmans, Kai: *Bedientheoretische Methoden als Hilfsmittel der Materialflussplanung*. Habilitation, Wissenschaftliche Berichte des Instituts für Fördertechnik und Logistiksysteme der Universität Karlsruhe (TH), Heft 52, 2000.
- [Gro84] Grosseschallau, Werner: *Materialflussrechnung: Modelle und Verfahren zur Analyse und Berechnung von Materialflusssystemen*. Berlin, New York: Springer, 1984. – ISBN 978-3540130932
- [Gud75] Gudehus, Timm: *Grenzeistungsgesetze für Verzweigungs- und Sammelelemente*. In: fördern und heben, Nr. 16, Krausskopf-Verlag, Mainz, 1975.
- [Gud76a] Gudehus, Timm: *Grenzeistungsgesetze für Verzweigungs- und Zusammenführungselemente*. In: Zeitschrift für Operations Research, Physica Verlag, Würzburg, Band 20, S. B37–B61, 1976. – DOI 10.1007/BF01920224
- [Gud76b] Gudehus, Timm: *Staueffekte vor Transportknoten*. In: Zeitschrift für Operations Research, Physica Verlag, Würzburg, Band 20, S. B207–B252 1976. – DOI 10.1007/BF01918395
- [Gud10] Gudehus, Timm: *Logistik: Grundlagen - Strategien - Anwendungen*. 4. Aufl. Berlin: Springer, 2010. – ISBN 978-3-540-89388-2
- [HSN07] ten Hompel, Michael; Schmidt, Thors-ten; Nagel, Lars: *Materialflusssysteme: Förder- und Lagertechnik*. 3. Aufl. Berlin: Springer, 2007. – ISBN 978-3-540-73235-8
- [Ral98] Rall, Bernd: *Analyse und Dimensionierung von Materialflußsystemen mittels geschlossener Warteschlangennetze*. Dissertation, Wissenschaftliche Berichte des Institutes für Fördertechnik und Logistiksysteme der Universität Karlsruhe (TH), Heft 46, 1998.
- [Sad07] Sadowsky, Volker: *Beitrag zur analytischen Leistungsermittlung von Kommissioniersystemen*. Dissertation. Universität Dortmund. Verlag Praxiswissen, Dortmund, 2007.
- [VDI4486] VDI-Richtlinie 4486: *Zuverlässigkeit in der Intralogistik - Leistungsverfügbarkeit*. Beuth Verlag, Berlin, März 2012.

Dipl.-Logist. Eike-Niklas Jung ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Förder- und Lagerwesen. Seine Arbeitsschwerpunkte liegen in der Ermittlung der Leistung und der Leistungsverfügbarkeit von Förder- und Lagersystemen, sowohl mit Hilfe analytischer Berechnungsverfahren als auch mittels ereignisdiskreter Simulation.

Adresse: Lehrstuhl für Förder- und Lagerwesen FLW, Technische Universität Dortmund, LogistikCampus, Joseph-von-Fraunhofer-Str. 2-4, 44227 Dortmund, Germany,
Telefon: +49 231 755-4832, Fax: +49 231 755-4768, E-Mail: eike.jung@flw.mb.tu-dortmund.de

Univ.-Prof. Dr. Michael ten Hompel ist Inhaber des Lehrstuhls für Förder- und Lagerwesen FLW sowie geschäftsführender Leiter des Fraunhofer-Instituts für Materialfluss und Logistik IML. Er beschäftigt sich mit einer Vielzahl aktueller Entwicklungen und Themen, insbesondere aus dem Bereich der Intralogistik und leitet hier eine Reihe von Forschungsprojekten. Dazu gehört auch das Teilprojekt C1 „Analytische Methoden für die Berechnung der Leistungsverfügbarkeit komplexer Materialflusssysteme“ des Paketantrags 672, in dem der vorliegende Beitrag entstanden ist.

Adresse: Lehrstuhl für Förder- und Lagerwesen, FLW, Technische Universität Dortmund, LogistikCampus, Joseph-von-Fraunhofer-Str. 2-4, 44227 Dortmund, Germany,
Telefon: +49 231 755-2793, Fax: +49 231 755-4768, E-Mail: michael.tenhompel@flw.mb.tu-dortmund.de