

Methode zur Zeitparametrisierung von Verbundfahrten mobiler Roboter

Lukas Karzel
Jonas Nölcke
Robert Schulz

Institut für Fördertechnik und Logistik (IFT)
Universität Stuttgart

Bei Verbundfahrten bewegen sich mehrere mobile Roboter synchron und transportieren gemeinsam Stückgüter oder führen Handhabungs- und Manipulationsaufgaben aus. Hierfür ist eine Zeitparametrisierung erforderlich, bei der der Geschwindigkeitsverlauf des Verbundes entlang eines vorgegebenen Pfades unter Berücksichtigung der individuellen kinematischen Grenzen der Fahr- und Lenkantriebe bestimmt wird. In diesem Beitrag wird ein neuer Algorithmus TOPP-EX vorgestellt, der die Zeitparametrisierung für Roboterverbünde mit unterschiedlichen Fahrwerkskonfigurationen explizit berechnet. In den durchgeführten Untersuchungen war TOPP-EX bei vergleichbarer Qualität der berechneten Geschwindigkeitsverläufe deutlich schneller als TOPP-RA.

[Schlüsselwörter: mobile Roboter, Verbundfahrt, kooperativer Transport, Zeitparametrisierung, TOPP]

Coordinated multi-robot motion enables multiple mobile robots to move synchronously while jointly transporting goods or performing handling and manipulation tasks. This requires time parameterization, in which the velocity profile of the robot formation along a predefined path is determined while considering the individual kinematic limits of the drive and steering actuators. This paper presents a new algorithm, TOPP-EX, which explicitly computes the time parameterization for robot formations with different drive configurations. In the conducted evaluations, TOPP-EX achieved comparable quality of the computed velocity profiles while being significantly faster than TOPP-RA.

[Keywords: mobile robots, coordinated multi-robot motion, cooperative transport, time-optimal path parameterization, TOPP]

1 EINLEITUNG

Die heutige Produktion und Logistik erfordern flexible, automatisierte und ressourceneffiziente Lösungen. Eine Möglichkeit hierfür sind Verbundfahrten mit mehreren mobilen Robotern, die synchron verfahren und kooperativ Stückgüter transportieren oder Handhabungs- und Mani-

pulationsaufgaben ausführen. Dadurch können das Einsatzspektrum und der Durchsatz der Roboter erhöht werden.

Eine Herausforderung bei solchen Verbundfahrten ist jedoch die Ansteuerung der Fahr- und Lenkmotoren unter Einhaltung ihrer kinematischen Grenzen. Abbildung 1 zeigt beispielhaft einen Fahrzeugverbund aus vier mobilen Robotern, die synchron entlang eines vorgegebenen Pfades verfahren sollen. Hierfür wird ein festgelegter Bezugspunkt k des Verbundes mit der Geschwindigkeit v_k entlang des Pfades bewegt.

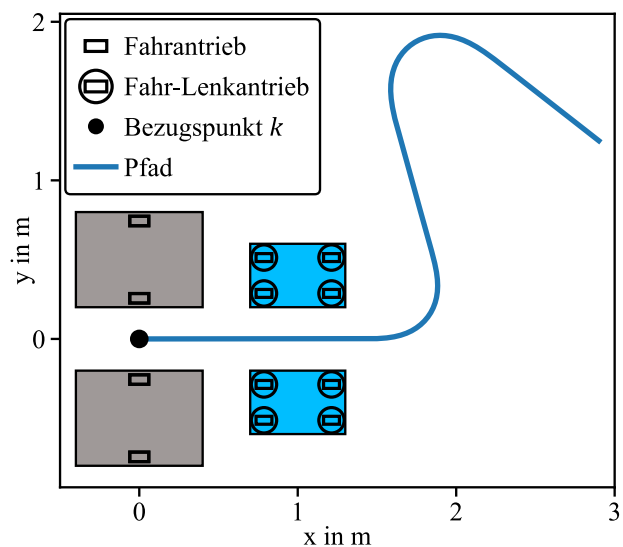


Abbildung 1. Vier mobile Roboter sollen einen festgelegten Pfad abfahren. Dafür wird der Bezugspunkt k des Verbundes entlang des Pfades verschoben.

Abbildung 2 zeigt einen beispielhaften Verlauf von v_k über die Zeit. Der Bezugspunkt k wird dabei mit $0,5 \text{ m/s}^2$ auf 1 m/s beschleunigt und gegen Ende des Pfades wieder mit $0,5 \text{ m/s}^2$ verzögert. Die unteren vier Diagramme zeigen die daraus resultierenden Radgeschwindigkeiten u_i , Radbeschleunigungen a_i , Lenkgeschwindigkeiten $\dot{\alpha}_i$ und Lenkbeschleunigungen $\ddot{\alpha}_i$ der einzelnen Räder i . Die vorgegebenen kinematischen Grenzen werden deutlich überschritten. So müssten die Räder beispielsweise mit über

10 m/s² beschleunigt werden, obwohl die zulässige Radbeschleunigung auf 0,6 m/s² begrenzt ist. Ebenso treten Lenkgeschwindigkeiten von mehr als 9 rad/s auf, während der zulässige Maximalwert lediglich 1 rad/s beträgt.

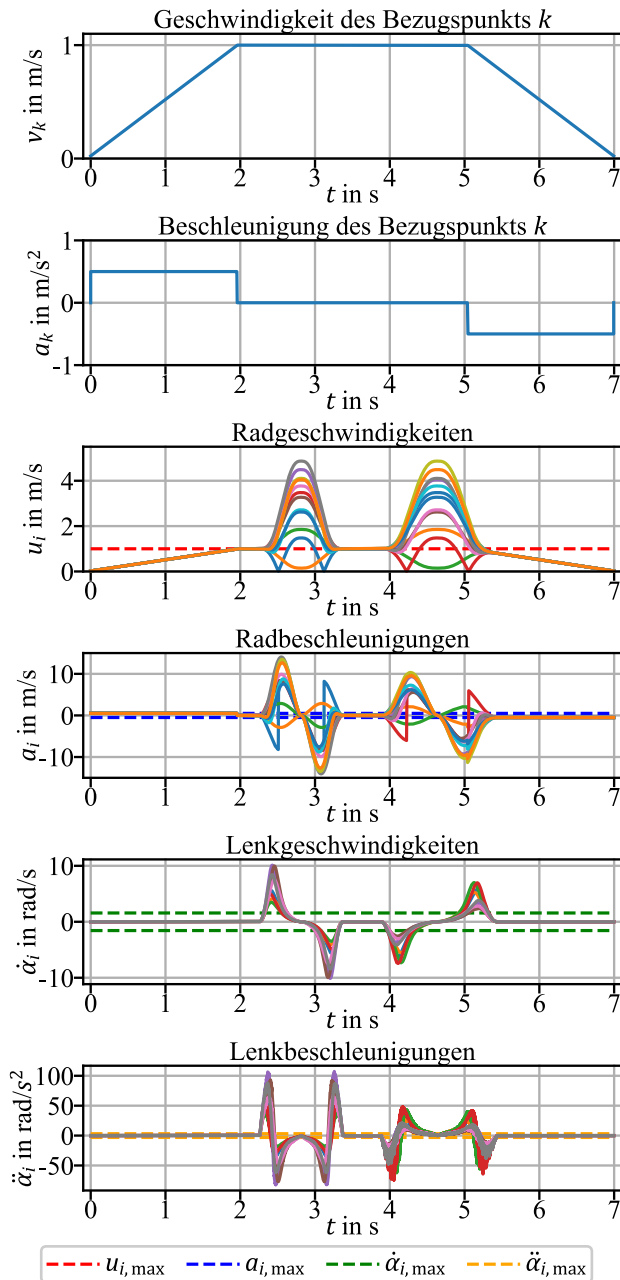


Abbildung 2. Die Geschwindigkeit v_k , Beschleunigung a_k und die daraus resultierenden Radgeschwindigkeiten u_i , Radbeschleunigungen a_i , Lenkgeschwindigkeiten $\dot{\alpha}_i$ und Lenkbeschleunigungen $\ddot{\alpha}_i$ über die Zeit mit ihren zugehörigen Grenzen.

Eine geeignete Vorgabe der Geschwindigkeit des Bezugspunktes kann daher nicht alleine anhand einer vorgegebenen Beschleunigungsrampe erfolgen. Stattdessen ist eine Zeitparametrisierung des Pfades erforderlich, bei der die kinematischen Grenzen der einzelnen Fahr- und Lenkmotoren berücksichtigt werden.

Der restliche Teil des Beitrages ist wie folgt aufgebaut. Zunächst wird in Kapitel 2 ein Überblick über den Stand der Technik zur Zeitparametrisierung allgemein sowie bei mobilen Robotern gegeben. In Kapitel 3 folgen die Herleitung und Erläuterung des neu vorgestellten Algorithmus TOPP-EX. In Kapitel 4 werden die Ergebnisse von TOPP-RA und TOPP-EX miteinander verglichen. In Kapitel 5 werden die Vor- und Nachteile von TOPP-EX diskutiert sowie mögliche Erweiterungen aufgezeigt. Abschließend werden die wesentlichen Ergebnisse in Kapitel 6 zusammengefasst.

2 LITERATURÜBERBLICK

Die Zeitparametrisierung eines abzufahrenden Pfades wurde bereits vielfach untersucht [1]. Ein großer Teil der Veröffentlichungen betrachtet dabei Industrieroboter, d. h. es wird ein zeitoptimaler Geschwindigkeitsverlauf des Endeffektors berechnet, der die kinematischen und ggf. dynamischen Grenzen der einzelnen Antriebsmotoren berücksichtigt. Die Methoden sind aber auch auf mobile Roboter übertragbar, wo man statt dem Endeffektor einen gewählten Bezugspunkt auf einem Pfad verschiebt. Andere Veröffentlichungen betrachten das Thema aber auch allgemein [2], [3] oder explizit auf mobile Roboter bezogen [4], [5], [6], [7], [8].

Die Methoden zur Zeitparametrisierung werden häufig in drei Gruppen eingeteilt: Numerische Integration (NI), Dynamische Programmierung (DP) und Konvexe Optimierung (CO). Die Methoden der numerischen Integration gelten als recheneffizient, aber weniger robust [1], [2]. Die Dynamische Programmierung ist deutlich rechenintensiver, ermöglicht dafür die Berücksichtigung einer Vielzahl an Randbedingungen [1]. Verfahren auf Basis Konvexer Optimierung gelten als robust und können neben der Zeit viele weitere Parameter optimieren, erfordern jedoch die Lösung eines Optimierungsproblems und sind daher oft auch langsamer als die der Numerischen Integration [1].

Viele der Arbeiten zur Zeitparametrisierung bei mobilen Robotern lassen sich nicht unmittelbar auf den in diesem Beitrag betrachteten Anwendungsfall übertragen. Die Verfahren in [5],[6] bestimmen die Zeitparametrisierung für einen Bezugspunkt eines mobilen Roboters, berücksichtigen jedoch nicht die kinematischen Grenzen der einzelnen Fahr- und Lenkantriebe. In [7], [8] werden die Radgeschwindigkeiten und Radbeschleunigungen begrenzt, nicht aber die Lenkantriebe. Das Verfahren aus [4] berücksichtigt die Fahr- und Lenkgeschwindigkeiten einzelner Räder, jedoch nicht deren Beschleunigungen.

Wie auch in diesem Beitrag werden in [9] die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Fahr- und Lenkantriebe berücksichtigt. Das Verfahren ist grundsätzlich für beliebige Fahrwerke vorgesehen. Die zur Beschreibung der Fahrzeugkinematik verwendete Jacobi-Matrix

wird jedoch lediglich für ein Fahrzeug mit zwei kombinierten Fahr-Lenkantrieben konkret angegeben. Zur Zeitparametrisierung wird Numerische Integration verwendet, die als schwer zu implementieren gilt [2]. Eine Herausforderung solcher Verfahren besteht in der Bestimmung sogenannter Switch Points, bei denen von der maximalen auf die minimale Beschleunigung gewechselt wird [2].

Pham und Pham [2] umgehen die für NI erforderliche Suche nach Switch Points mittels eines neu entwickelten, TOPP-RA genannten Algorithmus. Dieser berechnet recheneffizient und robust einen zeitoptimalen Geschwindigkeitsverlauf unter Berücksichtigung der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsgrenzen beliebiger Roboterachsen. In den in [2] dargestellten Benchmarks wird TOPP-RA mit NI verglichen. Mit wachsender Anzahl an Nebenbedingungen zeigt sich TOPP-RA als recheneffizienter als NI, während NI teilweise versagt, eine Lösung zu finden. TOPP-RA (Time-Optimal Path Parameterization based on Reachability Analysis) basiert auf einer Erreichbarkeitsanalyse, bei der pro Diskretisierungssegment eine kleine Anzahl linearer Optimierungsprobleme gelöst werden. Dadurch weist das Verfahren einen deutlich geringeren Rechenaufwand als klassische Ansätze auf Basis Konvexer Optimierung auf.

In [10] wird ein besonders recheneffizientes Verfahren für die Zeitparametrisierung eines zweiachsigen Gantry-Antriebes vorgestellt. Anders als bei TOPP-RA werden für die einzelnen Diskretisierungssegmente keine linearen Optimierungsprobleme gelöst. Stattdessen werden die zulässigen Geschwindigkeiten explizit aus den jeweiligen Randbedingungen bestimmt. In den betrachteten Arbeiten findet

sich damit kein Verfahren, das für beliebige Verbundkonfigurationen die radspezifischen Grenzen von Fahrgeschwindigkeit, Fahrbeschleunigung, Lenkgeschwindigkeit und Lenkbeschleunigung berücksichtigt und gleichzeitig ohne die Lösung von Optimierungsproblemen in den einzelnen Diskretisierungssegmenten oder der Suche nach Switch Points auskommt.

3 METHODE

Das Ziel ist die Berechnung eines Geschwindigkeitsverlaufs $v_k(s)$, mit dem der Roboterverbund einen festgelegten Pfad s möglichst schnell abfährt, ohne dabei die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsgrenzen der einzelnen Fahr- und Lenkantriebe zu überschreiten. Der vorgeschlagene Algorithmus basiert auf bekannten Prinzipien der Zeitparametrisierung: Zunächst wird ein Geschwindigkeitsverlauf $v_{k,max}(s)$ bestimmt, der von $v_k(s)$ nicht überschritten werden darf (Abbildung 3). Anschließend wird in einer Vorwärtsschleife $v_{k,f}(s)$ berechnet. Hierzu wird der Pfad vom Start aus durchlaufen und unter Einhaltung der kinematischen Grenzen jeweils mit der maximal zulässigen Beschleunigung beschleunigt, wobei $v_{k,max}(s)$ die obere Geschwindigkeitsgrenze darstellt. In der anschließenden Rückwärtsschleife wird der Pfad vom Ende aus rückwärts durchlaufen. Dabei stellt $v_{k,f}(s)$ die obere Geschwindigkeitsgrenze dar. Der in der Rückwärtsschleife berechnete Verlauf entspricht dem gesuchten Geschwindigkeitsverlauf $v_k(s)$.

Ähnlich wie in [10] werden die Geschwindigkeiten an den Diskretisierungspunkten explizit berechnet, ohne ein zusätzliches Optimierungsproblem zu lösen.

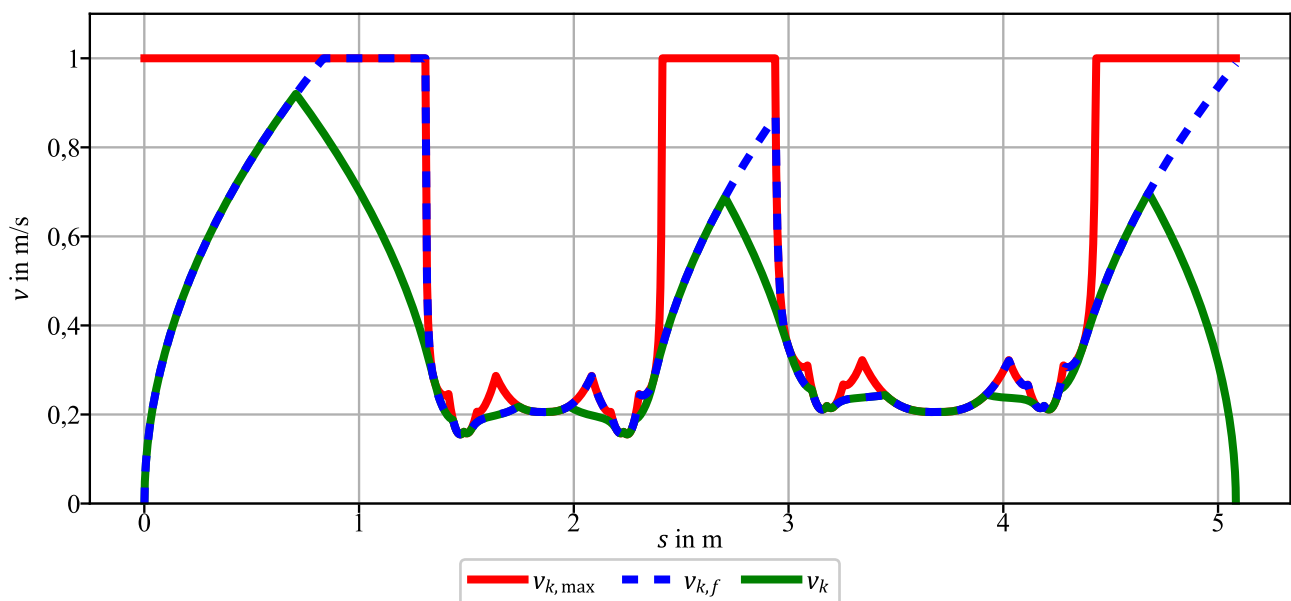


Abbildung 3. Die lokale Geschwindigkeitsgrenze $v_{k,max}$, der Geschwindigkeitsverlauf der Vorwärtsschleife $v_{k,f}$ und der aus der Rückwärtsschleife resultierende gesuchte Geschwindigkeitsverlauf v_k

Die nachfolgenden Gleichungen sind so formuliert, dass sie unabhängig von der Anzahl und Anordnung der Räder angewendet werden können.

3.1 GRUNDLEGENDES VORGEHEN

Die Berechnung erfolgt nach folgendem Schema:

1. Diskretisierung des abzufahrenden Pfades.
2. Mit der Krümmung $\kappa(s)$ des Pfades, der Geschwindigkeit $v_k(s)$ des Bezugspunktes k und dem Schwimmwinkel $\beta(s)$ können die Radgeschwindigkeiten $u_i(s)$ und Lenkwinkel $\alpha_i(s)$ der einzelnen Räder mit dem Modell in [11] berechnet werden. Da $v_k(s)$ zu diesem Zeitpunkt noch unbekannt ist, wird zunächst $v_k(s) = 1$ m/s gesetzt und daraus die dimensionslosen Radgeschwindigkeitsfaktoren $u_{i,1}(s)$ berechnet.
3. Aus $u_{i,1}(s)$ und $\alpha_i(s)$ werden die maximal zulässigen Geschwindigkeiten $v_{k,max}(s)$ berechnet. (Kapitel 3.2)
4. Mit einem Vorwärts- und Rückwärtsalgorithmus wird der Geschwindigkeitsverlauf $v_k(s)$ berechnet. (Kapitel 3.3)

Da das in [11] entwickelte Modell für $v_k(s) > 0$ keine negativen Radgeschwindigkeiten liefert, gilt $u_i(s) \geq 0$. Rückwärtsdrehende, nicht gelenkte Räder werden im Modell durch eine positive Radgeschwindigkeit in Verbindung mit einem Lenkwinkel von $\alpha_i = 180^\circ$ dargestellt. Die kinematischen Grenzen können für jedes Rad einzeln festgelegt werden. Für die Lenkgeschwindigkeiten und -beschleunigungen werden jedoch symmetrische Grenzen vorausgesetzt ($\rightarrow \dot{\alpha}_{i,min} = -\dot{\alpha}_{i,max}$ und $\ddot{\alpha}_{i,min} = -\ddot{\alpha}_{i,max}$). Zur Vereinfachung der Notation wird die explizite Abhängigkeit vom Pfadparameter s im Folgenden teilweise weggelassen. Ableitungen nach s werden durch $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{ds}$ und $(\cdot)'' = \frac{d^2(\cdot)}{ds^2}$ gekennzeichnet. So steht beispielsweise v_k für $v_k(s)$ und $u'_{i,1}$ für $\frac{du_{i,1}(s)}{ds}$. Für leere Mengen $\emptyset$ wird außerdem $\min(\emptyset) = +\infty$ und $\max(\emptyset) = -\infty$ definiert.

3.2 BERECHNUNG DER GESCHWINDIGKEITS- UND BESCHLEUNIGUNGSGRENZEN

In diesem Kapitel werden die lokale Geschwindigkeitsgrenze $v_{k,max}(s)$ sowie die zulässigen Beschleunigungsgrenzen $a_{k,min}(s)$ und $a_{k,max}(s)$ berechnet. $v_{k,max}(s)$ setzt sich aus mehreren Einzelgrenzen zusammen. Diese stellen einerseits sicher, dass die Geschwindigkeiten der Fahr- und Lenkantriebe eingehalten werden. Andererseits wird gewährleistet, dass bei jeder zulässigen Geschwindigkeit $0 \leq v_k(s) \leq v_{k,max}(s)$ lokal mindestens eine Beschleunigung $a_k(s)$ existiert, mit der sämtliche Fahr- und Lenkbeschleunigungsgrenzen eingehalten werden können. Die zulässigen Beschleunigungsgrenzen $a_{k,min}(s)$ und

$a_{k,max}(s)$ hängen sowohl vom jeweiligen Pfadpunkt s als auch von der aktuellen Geschwindigkeit $v_k(s)$ ab. Konkrete Werte können daher erst während der nachfolgenden Vorwärts- und Rückwärtsschleife bestimmt werden. Die Geschwindigkeitsgrenze $v_{k,max}(s)$ muss jedoch bereits sicherstellen, dass für jede zulässige Geschwindigkeit $a_{k,max}(s) \geq a_{k,min}(s)$ gilt. Andernfalls könnte beispielsweise $a_{k,max}(s)$ liefern, dass der Verbund mit maximal 1 m/s² beschleunigen darf, während $a_{k,min}(s)$ ergibt, dass der Verbund mit mindestens 1,1 m/s² beschleunigen muss. In diesem Fall existiert keine Beschleunigung a_k , mit der beide Randbedingungen gleichzeitig eingehalten werden können.

3.2.1 BEGRENZUNG DER FAHRGESCHWINDIGKEIT

Mit

$$u_i = u_{i,1} \cdot v_k \quad (1)$$

können die Radgeschwindigkeiten $u_i(s)$ für beliebige Geschwindigkeiten $v_k(s)$ des Bezugspunktes berechnet werden. Die maximale zulässige Geschwindigkeit des Bezugspunktes, bei der die Geschwindigkeitsgrenzen aller Räder eingehalten werden, ergibt sich damit zu:

$$v_{k,max,u}(s) = \min_{u_{i,1}(s) > 0} \left(\frac{u_{i,max}}{u_{i,1}} \right) \quad (2)$$

3.2.2 BEGRENZUNG DER FAHRBESCHLEUNIGUNG

Durch zeitliche Ableitung von (1) ergeben sich die Radbeschleunigungen $a_i(s)$:

$$\begin{aligned} a_i(s) &= \frac{d}{dt}(u_i) \\ &= \frac{du_{i,1}}{ds} \frac{ds}{dt} v_k + u_{i,1} \frac{dv_k}{dt} \\ &= u'_{i,1} v_k^2 + u_{i,1} \cdot a_k \end{aligned} \quad (3)$$

Für jedes Rad i ist eine untere und obere Beschleunigungsgrenze vorgegeben:

$$a_{i,min} \leq a_i(s) \leq a_{i,max} \quad (4)$$

Einsetzen von (3) in (4) ergibt:

$$a_{i,min} \leq u'_{i,1} v_k^2 + u_{i,1} \cdot a_k \leq a_{i,max} \quad (5)$$

Für $u_{i,1} > 0$ folgt aus (5):

$$\frac{a_{i,min} - u'_{i,1} v_k^2}{u_{i,1}} \leq a_k(s) \leq \frac{a_{i,max} - u'_{i,1} v_k^2}{u_{i,1}} \quad (6)$$

Unter Berücksichtigung aller Räder ergeben sich daraus die untere und obere zulässige Beschleunigungsgrenze des Bezugspunktes:

$$a_{k,min,a}(s) = \max_{u_{i,1} > 0} \left(\frac{a_{i,min} - u'_{i,1} v_k^2}{u_{i,1}} \right) \quad (7)$$

$$a_{k,max,a}(s) = \min_{u_{i,1} > 0} \left(\frac{a_{i,max} - u'_{i,1} v_k^2}{u_{i,1}} \right) \quad (8)$$

3.2.3 GESCHWINDIGKEITSGRENZE FÜR $a_{k,max,a}(s) \geq a_{k,min,a}(s)$

Damit eine zulässige Beschleunigung a_k existiert, muss $a_{k,max,a} \geq a_{k,min,a}$ gelten. Hieraus ergibt sich eine lokale Geschwindigkeitsgrenze $v_{k,max,aa}$. Für alle Kombinationen von Rädern i und j mit $u_{i,1} > 0$ und $u_{j,1}(s) > 0$ muss daher gelten:

$$\frac{a_{i,max} - u'_{i,1} v_k^2}{u_{i,1}} \geq \frac{a_{j,min} - u'_{j,1} v_k^2}{u_{j,1}} \quad (9)$$

Aus (9) folgt:

$$v_{k,max,aa}(s) = \sqrt{\min_{\substack{i,j \\ u_{i,1} > 0, u_{j,1} > 0 \\ \frac{u'_{i,1}}{u_{i,1}} - \frac{u'_{j,1}}{u_{j,1}} > 0}} \left(\frac{\frac{a_{i,max}}{u_{i,1}} - \frac{a_{j,min}}{u_{j,1}}}{\frac{u'_{i,1}}{u_{i,1}} - \frac{u'_{j,1}}{u_{j,1}}} \right)} \quad (10)$$

Für $u_{i,1} = 0$ hängt die Radbeschleunigung nach (3) nicht von a_k ab. In diesem Fall muss direkt

$$a_{i,max} \geq u'_{i,1} v_k^2 \geq a_{i,min} \quad (11)$$

erfüllt sein und damit

$$v_{k,max,aa0}(s) = \sqrt{\min \left\{ \begin{array}{l} \min_{\substack{i \\ u'_{i,1} > 0 \\ u_{i,1} = 0}} \left(\frac{a_{i,max}}{u'_{i,1}} \right), \\ \min_{\substack{i \\ u'_{i,1} < 0 \\ u_{i,1} = 0}} \left(\frac{a_{i,min}}{u'_{i,1}} \right) \end{array} \right\}} \quad (12)$$

Für $u_{i,1} = 0$ und $u'_{i,1} = 0$ gilt $a_i = 0$, sodass aus diesem Rad keine zusätzliche Geschwindigkeitsgrenze resultiert.

3.2.4 BEGRENZUNG DER LENKGESCHWINDIGKEITEN

Die Lenkgeschwindigkeiten $\dot{\alpha}_i(s)$ der einzelnen Räder ergeben sich zu:

$$\dot{\alpha}_i(s) = \alpha'_i \cdot v_k \quad (13)$$

Unter Berücksichtigung der symmetrischen Lenkgeschwindigkeitsgrenze $|\dot{\alpha}_i(s)| \leq \dot{\alpha}_{i,max}$ ergibt sich die maximal zulässige Geschwindigkeit des Bezugspunktes zu:

$$v_{k,max,\dot{\alpha}}(s) = \min_{\alpha'_i \neq 0} \left(\frac{\dot{\alpha}_{i,max}}{|\alpha'_i|} \right) \quad (14)$$

Für $\alpha'_i = 0$ gilt $\dot{\alpha}_i = 0$, sodass aus diesem Rad keine Geschwindigkeitsgrenze resultiert.

3.2.5 BEGRENZUNG DER LENKBESCHLEUNIGUNGEN

Die Lenkbeschleunigungen $\ddot{\alpha}_i(s)$ lassen sich über die zweifache zeitliche Ableitung der Lenkwinkel berechnen:

$$\ddot{\alpha}_i(s) = \frac{d^2}{dt^2}(\alpha_i) = \alpha''_i v_k^2 + \alpha'_i \cdot a_k \quad (15)$$

(15) eingesetzt in

$$-\ddot{\alpha}_{i,max} \leq \ddot{\alpha}_i(s) \leq \ddot{\alpha}_{i,max} \quad (16)$$

und umgeformt ergibt für $\alpha'_i \neq 0$:

$$\frac{-\ddot{\alpha}_{i,max}}{|\alpha'_i|} - \frac{\alpha''_i v_k^2}{\alpha'_i} \leq a_k \leq \frac{\ddot{\alpha}_{i,max}}{|\alpha'_i|} - \frac{\alpha''_i v_k^2}{\alpha'_i} \quad (17)$$

Unter Berücksichtigung aller Räder ergeben sich die untere und obere Beschleunigungsgrenze des Bezugspunktes aufgrund der Lenkbeschleunigung zu

$$a_{k,min,\ddot{\alpha}}(s) = \max_{\alpha'_i \neq 0} \left(\frac{-\ddot{\alpha}_{i,max}}{|\alpha'_i|} - \frac{\alpha''_i v_k^2}{\alpha'_i} \right) \quad (18)$$

$$a_{k,max,\ddot{\alpha}}(s) = \min_{\alpha'_i \neq 0} \left(\frac{\ddot{\alpha}_{i,max}}{|\alpha'_i|} - \frac{\alpha''_i v_k^2}{\alpha'_i} \right) \quad (19)$$

3.2.6 GESCHWINDIGKEITSGRENZE FÜR $a_{k,max,\ddot{\alpha}}(s) \geq a_{k,min,\ddot{\alpha}}(s)$

Damit eine Beschleunigung a_k existiert, die die Lenkbeschleunigungsgrenzen aller Räder gleichzeitig einhält, muss $a_{k,max,\ddot{\alpha}}(s) \geq a_{k,min,\ddot{\alpha}}(s)$ gelten. Hierfür muss für alle Radpaare i, j mit $\alpha'_i \neq 0$ und $\alpha'_j \neq 0$ gelten:

$$\frac{\ddot{\alpha}_{i,max}}{|\alpha'_i|} + \frac{-\alpha''_i v_k^2}{\alpha'_i} \geq \frac{-\ddot{\alpha}_{j,max}}{|\alpha'_j|} + \frac{-\alpha''_j v_k^2}{\alpha'_j} \quad (20)$$

(20) umgeformt ergibt:

$$v_{k,max,\ddot{a}\ddot{a}}(s) = \sqrt{\min_{\substack{i,j \\ \alpha'_i \neq 0, \alpha'_j \neq 0 \\ \frac{\alpha''_i}{\alpha'_i} - \frac{\alpha''_j}{\alpha'_j} > 0}} \left(\frac{\frac{\ddot{\alpha}_{i,max}}{|\alpha'_i|} + \frac{\ddot{\alpha}_{j,max}}{|\alpha'_j|}}{\frac{\alpha''_i}{\alpha'_i} - \frac{\alpha''_j}{\alpha'_j}} \right)} \quad (21)$$

Für $\alpha'_i = 0$ hängt die Lenkbeschleunigung nach (15) nicht von α_k ab. In diesem Fall muss direkt

$$\ddot{\alpha}_{i,max} \geq \alpha''_i v_k^2 \geq -\ddot{\alpha}_{i,max} \quad (22)$$

gelten. Daraus folgt

$$v_{k,max,\ddot{a}0}(s) = \sqrt{\min_{\substack{i \\ \alpha'_i = 0 \\ \alpha''_i \neq 0}} \left(\frac{\ddot{\alpha}_{i,max}}{|\alpha''_i|} \right)} \quad (23)$$

Für $\alpha'_i = 0$ und $\alpha''_i = 0$ ergibt sich keine zusätzliche Geschwindigkeitsgrenze.

3.2.7 GESCHWINDIGKEITSGRENZE FÜR $a_{k,max,a}(s) \geq a_{k,min,\ddot{a}}(s)$ UND $a_{k,max,\ddot{a}}(s) \geq a_{k,min,a}(s)$

Die bisher hergeleiteten Bedingungen gewährleisten getrennt voneinander die Existenz eines zulässigen Fahrbeschleunigungsintervalls $[a_{k,min,a}, a_{k,max,a}]$ und eines zulässigen Lenkbeschleunigungsintervalls $[a_{k,min,\ddot{a}}, a_{k,max,\ddot{a}}]$. Damit eine Beschleunigung a_k existiert, die sowohl die Fahr- als auch die Lenkbeschleunigungsgrenzen einhält, müssen sich zusätzlich beide Intervalle überschneiden. Hierfür müssen $a_{k,max,\ddot{a}}(s) \geq a_{k,min,a}(s)$ und $a_{k,max,a}(s) \geq a_{k,min,\ddot{a}}(s)$ gelten.

Für $a_{k,max,\ddot{a}}(s) \geq a_{k,min,a}(s)$ mit $\alpha'_i \neq 0$ und $u_{j,1} > 0$ ergibt sich:

$$\frac{\ddot{\alpha}_{i,max}}{|\alpha'_i|} + \frac{-\alpha''_i v_k^2}{\alpha'_i} \geq \frac{a_{j,min} - u'_{j,1} v_k^2(s)}{u_{j,1}(s)} \quad (24)$$

(24) nach v_k umgestellt:

$$v_{k,max,\ddot{a}a}(s) = \sqrt{\min_{\substack{i,j \\ \alpha'_i \neq 0, u_{j,1} > 0 \\ \frac{\alpha''_i}{\alpha'_i} - \frac{u'_{j,1}}{u_{j,1}} > 0}} \left(\frac{\frac{\ddot{\alpha}_{i,max}}{|\alpha'_i|} - \frac{a_{j,min}}{u_{j,1}}}{\frac{\alpha''_i}{\alpha'_i} - \frac{u'_{j,1}}{u_{j,1}}} \right)} \quad (25)$$

Damit $a_{k,max,a}(s) \geq a_{k,min,\ddot{a}}(s)$ erfüllt ist, muss für $\alpha'_j \neq 0$ und $u_{i,1} > 0$ gelten:

$$\frac{a_{i,max} - u'_{i,1} v_k^2(s)}{u_{i,1}} \geq \frac{-\ddot{\alpha}_{j,max}}{|\alpha'_j|} + \frac{-\alpha''_j v_k^2}{\alpha'_j} \quad (26)$$

Und damit

$$v_{k,max,a\ddot{a}}(s) = \sqrt{\min_{\substack{i,j \\ \alpha'_j \neq 0, u_{i,1} > 0 \\ \frac{u'_{i,1}}{u_{i,1}} - \frac{\alpha''_j}{\alpha'_j} > 0}} \left(\frac{\frac{a_{i,max}}{u_{i,1}} + \frac{\ddot{\alpha}_{j,max}}{|\alpha'_j|}}{\frac{u'_{i,1}}{u_{i,1}} - \frac{\alpha''_j}{\alpha'_j}} \right)} \quad (27)$$

3.2.8 BERECHNUNG VON $v_{k,max}(s)$

Die lokale Geschwindigkeitsgrenze ergibt sich aus dem Minimum aller zuvor hergeleiteten Einzelgrenzen:

$$v_{k,max}(s) = \min \left\{ \begin{array}{l} v_{k,max,u}(s) \\ v_{k,max,\ddot{a}}(s) \\ v_{k,max,aa}(s) \\ v_{k,max,aa0}(s) \\ v_{k,max,\ddot{a}\ddot{a}}(s) \\ v_{k,max,\ddot{a}0}(s) \\ v_{k,max,\ddot{a}a}(s) \\ v_{k,max,a\ddot{a}}(s) \end{array} \right\} \quad (28)$$

Damit werden einerseits die Fahr- und Lenkgeschwindigkeitsgrenzen eingehalten und andererseits sichergestellt, dass an jedem Bahnpunkt und für jede zulässige Geschwindigkeit lokal mindestens eine Beschleunigung a_k existiert, mit der sämtliche Fahr- und Lenkbeschleunigungsgrenzen eingehalten werden können.

3.3 VORWÄRTS-RÜCKWÄRTS-ALGORITHMUS

Im Anschluss wird mit einem Vorwärts-Rückwärts-Algorithmus der finale Geschwindigkeitsverlauf $v_k(s)$ berechnet.

3.3.1 DIE VORWÄRTSSCHLEIFE

Die Vorwärtsschleife bestimmt für jeden der $n - 1$ Diskretisierungssegmente zunächst die maximal zulässige Beschleunigung $a_{k,max}$ unter Berücksichtigung beider Segmentränder. Daraus wird die maximal erreichbare

Geschwindigkeit am nächsten Diskretisierungspunkt berechnet und anschließend durch die lokale Geschwindigkeitsgrenze $v_{k,max}$ begrenzt:

$$v_{k,f}[s_j] = \min \left\{ \sqrt{v_{k,f}^2[s_{j-1}] + 2a_{k,max} \Delta s} \right. \\ \left. v_{k,max}[s_j] \right\} \quad (29)$$

Dabei ist $\Delta s = s_j - s_{j-1}$. Die Beschleunigung $a_{k,max}$ ist die kleinste von vier Einzelwerten, die im Folgenden erläutert werden:

$$a_{k,max} = \min \left\{ \begin{array}{l} a_{k,max,a,s_{j-1}} \\ a_{k,max,a,s_j} \\ a_{k,max,\ddot{a},s_{j-1}} \\ a_{k,max,\ddot{a},s_j} \end{array} \right\} \quad (30)$$

$a_{k,max,a,s_{j-1}}$ bezeichnet die aus den Radbeschleunigungsgrenzen resultierende obere Beschleunigungsgrenze am linken Segmentrand s_{j-1} und kann mit (8) berechnet werden. Für den Segmentrand s_j muss die Geschwindigkeit $v_{k,f}[s_j]$, die zu diesem Zeitpunkt noch unbekannt ist, zusätzlich berücksichtigt werden. Dafür muss (8) in angepasster Version neu hergeleitet werden. Formel (5), für den Punkt s_j diskretisiert, lautet:

$$a_{i,max} \geq u'_{i,1}[s_j] v_{k,f}^2[s_j] + u_{i,1}[s_j] \cdot a_k \geq a_{i,min} \quad (31)$$

Da in der Vorwärtsschleife $v_{k,f}^2[s_{j-1}]$ bekannt ist, nicht aber $v_{k,f}^2[s_j]$, wird $v_{k,f}^2[s_j]$ in (31) mit (32) ersetzt.

$$v_{k,f}^2[s_j] = v_{k,f}^2[s_{j-1}] + 2a_k \Delta s \quad (32)$$

Umgeformt ergibt sich mit $c_{i,s_j} = u'_{i,1}[s_j] \cdot 2\Delta s + u_{i,1}[s_j]$ die Beschleunigungsgrenze:

$$a_{k,max,a,s_j} = \min \left\{ \begin{array}{l} \min_{c_{i,s_j} > 0} \left(\frac{a_{i,max} - u'_{i,1}[s_j] v_{k,f}^2[s_{j-1}]}{c_{i,s_j}} \right) \\ \min_{c_{i,s_j} < 0} \left(\frac{a_{i,min} - u'_{i,1}[s_j] v_{k,f}^2[s_{j-1}]}{c_{i,s_j}} \right) \end{array} \right\} \quad (33)$$

Analog sind $a_{k,max,\ddot{a},s_{j-1}}$ und $a_{k,max,\ddot{a},s_j}$ die Beschleunigungsgrenze, die sich an den Punkten s_{j-1} und s_j aus den

Grenzen der Lenkbeschleunigungen ergeben. Die zugehörigen Formeln sind (19) und mit $e_{i,s_j} = \alpha'_i[s_j] \cdot 2\Delta s + \alpha'_i[s_j]$:

$$a_{k,max,\ddot{a},s_j} = \min \left\{ \begin{array}{l} \min_{e_{i,s_j} > 0} \left(\frac{\ddot{\alpha}_{i,max} - \alpha''_i[s_j] v_{k,f}^2[s_{j-1}]}{e_{i,s_j}} \right) \\ \min_{e_{i,s_j} < 0} \left(\frac{-\ddot{\alpha}_{i,max} - \alpha''_i[s_j] v_{k,f}^2[s_{j-1}]}{e_{i,s_j}} \right) \end{array} \right\} \quad (34)$$

Innerhalb des Segments $\Delta s = s_j - s_{j-1}$ wird die Beschleunigung als konstant angenommen. Diese Vereinfachung vermeidet eine zusätzliche Optimierung innerhalb der einzelnen Diskretisierungsschritte und reduziert dadurch den Rechenaufwand. Gleichzeitig ist eine ausreichend feine Diskretisierung erforderlich, um den Diskretisierungsfehler gering zu halten. Abbildung 3 zeigt die Geschwindigkeitsverläufe der Vorwärtsschleife $v_{k,f}$, den finalen Geschwindigkeitsverlauf v_k nach der Rückwärtsschleife und die lokale Geschwindigkeitsgrenze $v_{k,max}$.

Vorwärtsschleife:

$$v_{k,f}[s_0] = 0$$

for $s_j = 1$ bis $n - 1$

$$a_{k,max,a,s_{j-1}} = \min_i \left(\frac{a_{i,max} - u'_{i,1}[s_{j-1}] v_{k,f}^2[s_{j-1}]}{u_{i,1}[s_{j-1}]} \right)$$

$$a_{k,max,\ddot{a},s_{j-1}} = \min_i \left(\frac{\ddot{\alpha}_{i,max}}{|\alpha'_i[s_{j-1}]|} - \frac{\alpha''_i[s_{j-1}] v_{k,f}^2[s_{j-1}]}{\alpha'_i[s_{j-1}]} \right)$$

$$a_{k,max,a,s_j} = \min \left\{ \begin{array}{l} \min_{c_{i,s_j} > 0} \left(\frac{a_{i,max} - u'_{i,1}[s_j] v_{k,f}^2[s_{j-1}]}{c_{i,s_j}} \right) \\ \min_{c_{i,s_j} < 0} \left(\frac{a_{i,min} - u'_{i,1}[s_j] v_{k,f}^2[s_{j-1}]}{c_{i,s_j}} \right) \end{array} \right\}$$

$$a_{k,max,\ddot{a},s_j} = \min \left\{ \begin{array}{l} \min_{e_{i,s_j} > 0} \left(\frac{\ddot{\alpha}_{i,max} - \alpha''_i[s_j] v_{k,f}^2[s_{j-1}]}{e_{i,s_j}} \right) \\ \min_{e_{i,s_j} < 0} \left(\frac{-\ddot{\alpha}_{i,max} - \alpha''_i[s_j] v_{k,f}^2[s_{j-1}]}{e_{i,s_j}} \right) \end{array} \right\}$$

$$a_{k,max} = \min \left\{ \begin{array}{l} a_{k,max,a,s_{j-1}} \\ a_{k,max,a,s_j} \\ a_{k,max,\ddot{a},s_{j-1}} \\ a_{k,max,\ddot{a},s_j} \end{array} \right\}$$

$$v_{k,f}[s_j] = \min \left\{ \sqrt{v_{k,f}^2[s_{j-1}] + 2a_{k,max} \Delta s} \right. \\ \left. v_{k,max}[s_j] \right\}$$

3.3.2 DIE RÜCKWÄRTSSCHLEIFE

Die Rückwärtsschleife folgt dem Schema, nur dass die $n - 1$ Diskretisierungssegmente rückwärts durchlaufen werden.

Mit $d_{i,s_j} = u_{i,1}[s_j] - u'_{i,1}[s_j] \cdot 2\Delta s$ und $f_{i,s_j} = \alpha'_i[s_j] - \alpha''_i[s_j] \cdot 2\Delta s$:

Rückwärtsschleife:

$$v_k[s_{n-1}] = 0$$

for $s_j = n - 2$ bis 0

$$a_{k,min,a,s_{j+1}} = \max_i \left(\frac{a_{i,min} - u'_{i,1}[s_{j+1}]v_k^2[s_{j+1}]}{u_{i,1}[s_{j+1}]} \right)$$

$$a_{k,min,\ddot{\alpha},s_{j+1}} = \max_i \left(\frac{-\ddot{\alpha}_{i,max}}{|\alpha'_i[s_{j+1}]|} - \frac{\alpha''_i[s_{j+1}]v_k^2[s_{j+1}]}{\alpha'_i[s_{j+1}]} \right)$$

$$a_{k,min,a,s_j} = \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{d_{i,s_j} > 0} \left(\frac{a_{i,min} - u'_{i,1}[s_j]v_k^2[s_{j+1}]}{d_{i,s_j}} \right) \\ \max_{d_{i,s_j} < 0} \left(\frac{a_{i,max} - u'_{i,1}[s_j]v_k^2[s_{j+1}]}{d_{i,s_j}} \right) \end{array} \right\}$$

$$a_{k,min,\ddot{\alpha},s_j} = \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{f_{i,s_j} > 0} \left(\frac{-\ddot{\alpha}_{i,max} - \alpha''_i[s_j]v_k^2[s_{j+1}]}{f_{i,s_j}} \right) \\ \max_{f_{i,s_j} < 0} \left(\frac{\ddot{\alpha}_{i,max} - \alpha''_i[s_j]v_k^2[s_{j+1}]}{f_{i,s_j}} \right) \end{array} \right\}$$

$$a_{k,min} = \max \left\{ \begin{array}{l} a_{k,min,a,s_{j+1}} \\ a_{k,min,a,s_j} \\ a_{k,min,\ddot{\alpha},s_{j+1}} \\ a_{k,min,\ddot{\alpha},s_j} \end{array} \right\}$$

$$v_k[s_j] = \min \left\{ \sqrt{v_k^2[s_{j+1}] - 2a_{k,min} \Delta s}, v_{k,f}[s_j] \right\}$$

3.3.3 v_k IM FALLE EINES NOTHALTS

Angenommen an der Stelle j_{stopp} wird ein Nothalt eingeleitet. Dann kann v_k ausgehend von der aktuellen Geschwindigkeit $v_{k,stopp}$ berechnet werden:

Schleife für Not-Halt:

$$j = j_{stopp}$$

$$v_k[s_j] = v_{k,stopp}$$

while $v_k[s_j] > 0$

$$a_{k,min,a,s_j} = \max_i \left(\frac{a_{i,min} - u'_{i,1}[s_j]v_k^2[s_j]}{u_{i,1}[s_j]} \right)$$

$$a_{k,min,\ddot{\alpha},s_j} = \max_i \left(\frac{-\ddot{\alpha}_{i,max}}{|\alpha'_i[s_j]|} - \frac{\alpha''_i[s_j]v_k^2[s_j]}{\alpha'_i[s_j]} \right)$$

$$a_{k,min,a,s_{j+1}}$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{c_{i,s_{j+1}} > 0} \left(\frac{a_{i,min} - u'_{i,1}[s_{j+1}]v_k^2[s_j]}{c_{i,s_{j+1}}} \right) \\ \max_{c_{i,s_{j+1}} < 0} \left(\frac{a_{i,max} - u'_{i,1}[s_{j+1}]v_k^2[s_j]}{c_{i,s_{j+1}}} \right) \end{array} \right\}$$

$$a_{k,min,\ddot{\alpha},s_{j+1}}$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{e_{i,s_{j+1}} > 0} \left(\frac{-\ddot{\alpha}_{i,max} - \alpha''_i[s_{j+1}]v_k^2[s_j]}{e_{i,s_{j+1}}} \right) \\ \max_{e_{i,s_{j+1}} < 0} \left(\frac{\ddot{\alpha}_{i,max} - \alpha''_i[s_{j+1}]v_k^2[s_j]}{e_{i,s_{j+1}}} \right) \end{array} \right\}$$

$$a_{k,min} = \max \left\{ \begin{array}{l} a_{k,min,a,s_j} \\ a_{k,min,a,s_{j+1}} \\ a_{k,min,\ddot{\alpha},s_j} \\ a_{k,min,\ddot{\alpha},s_{j+1}} \end{array} \right\}$$

$$v_k[s_{j+1}] = \sqrt{\max(v_k^2[s_j] + 2a_{k,min} \Delta s, 0)}$$

$$j = j + 1$$

4 ERGEBNISSE

Abbildung 4 zeigt für das Szenario aus Abbildung 1 mit vier Fahrzeugen, acht gelenkten und vier nicht gelenkten Fahrantrieben den berechneten Geschwindigkeitsverlauf v_k über die Zeit. Zusätzlich sind die Verläufe der einzelnen Radgeschwindigkeiten, Radbeschleunigungen, Lenkgeschwindigkeiten und Lenkbeschleunigungen mit den jeweils zugehörigen Grenzen dargestellt. Für eine übersichtlichere Darstellung wurden für alle Antriebe identische kinematische Grenzen $u_{i,max}$, $a_{i,max}$, $\ddot{\alpha}_{i,max}$ und $\ddot{\alpha}_{i,max}$ gewählt. Die vorgestellte Methode ermöglicht jedoch auch die Berücksichtigung antriebspezifischer Grenzen sowie asymmetrischer Radbeschleunigungsgrenzen. Das vorgestellte Verfahren wird im Folgenden TOPP-EX (Time-Optimal Path Parameterization – Explicit) bezeichnet, da es die Geschwindigkeiten explizit berechnet, ohne in den einzelnen Diskretisierungsschritten Optimierungsprobleme zu lösen.

Der Algorithmus bestimmt den Geschwindigkeitsverlauf so, dass die jeweils verfügbaren Geschwindigkeits- und Beschleunigungsgrenzen möglichst weit ausgenutzt werden. Aufgrund der Diskretisierung und der Annahme einer konstanten Beschleunigung innerhalb eines Diskretisierungssegments kann der berechnete Verlauf jedoch vom theoretisch zeitoptimalen Verlauf abweichen. Im Folgenden werden daher die Fahrtdauer, die Überschreitung der kinematischen Grenzen und die Berechnungszeit für unterschiedliche Anzahlen von Diskretisierungspunkten untersucht. Zusätzlich wird die Anzahl an Fahr-Lenkantrieben variiert. Die Berechnungen wurden für den Pfad aus Abbildung 1 sowohl mit dem hier vorgestellten Algorithmus TOPP-EX als auch mit TOPP-RA durchgeführt.

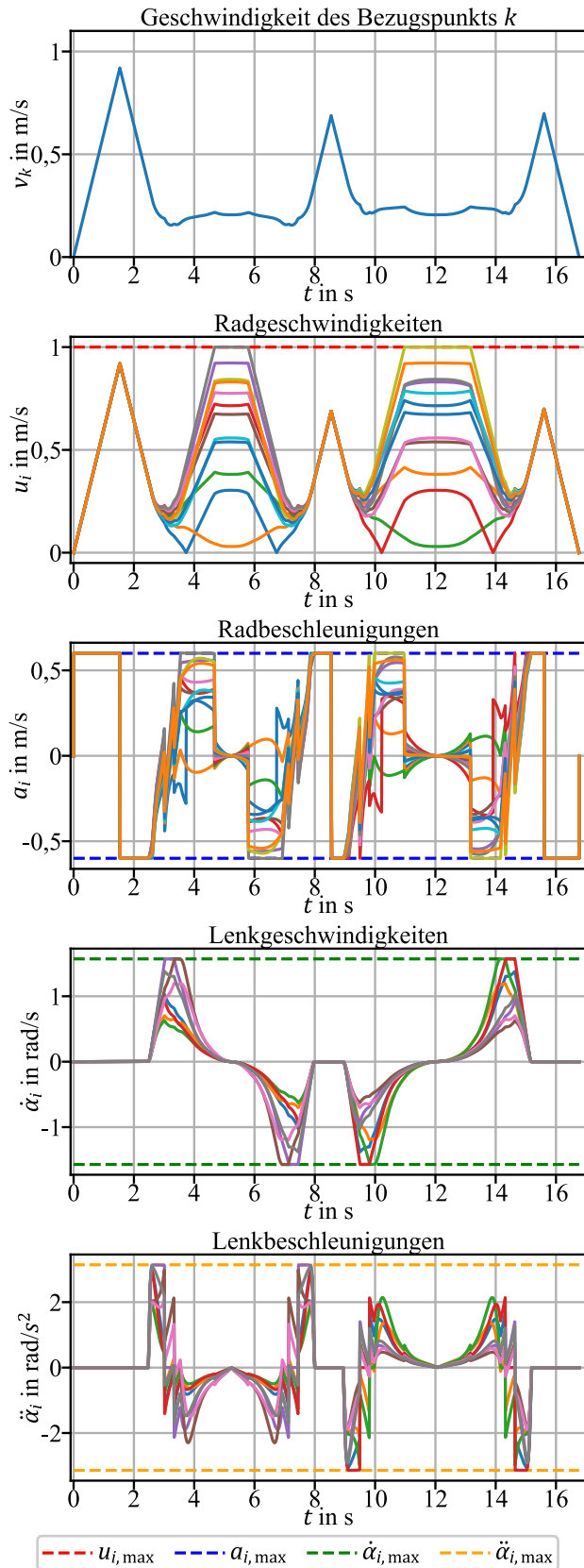


Abbildung 4. Der berechnete Geschwindigkeitsverlauf v_k und die Verläufe der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der einzelnen Räder i über die Zeit

4.1 VERGLEICH DER RECHENDAUER

Abbildung 5 zeigt die Berechnungszeiten für jeweils 4, 16 und 64 Fahr-Lenkantriebe in Abhängigkeit von der Anzahl n der Diskretisierungspunkte. Die dargestellten Werte entsprechen dem Median aus jeweils 100 Berechnungsdurchläufen. Der explizite Algorithmus weist für alle untersuchten Konfigurationen geringere Berechnungszeiten als TOPP-RA auf. TOPP-EX ist in den untersuchten Konfigurationen etwa 11- bis 220-mal schneller als TOPP-RA. Die Ursache für die erhöhte Berechnungszeit von TOPP-RA für $n = 100$ und 64 Fahr-Lenkantrieben wurde nicht weiter untersucht.

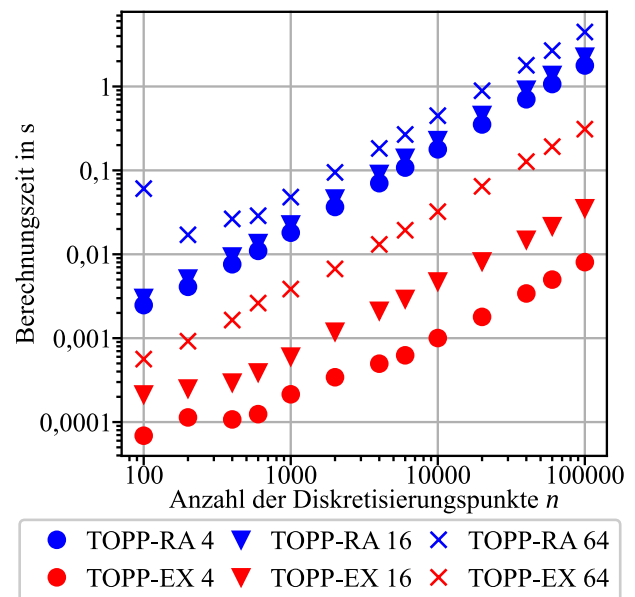


Abbildung 5. Die Berechnungszeiten in Abhängigkeit der Anzahl der Diskretisierungspunkten n für TOPP-EX und TOPP-RA mit jeweils 4, 16 und 64 Fahr-Lenkantrieben

4.2 VERGLEICH DER GRENZÜBERSCHREITUNGEN

Abbildung 6 zeigt die maximale relative Überschreitung der einzelnen kinematischen Grenzen für 16 Fahr-Lenkantriebe. Mit zunehmender Anzahl an Diskretisierungspunkten nehmen die Überschreitungen bei beiden Verfahren deutlich ab. Für die Fahrgeschwindigkeiten u_i und die Lenkgeschwindigkeiten $\dot{a}_i$ liefern TOPP-EX und TOPP-RA nahezu identische Ergebnisse. Bei den Fahrbeschleunigungen a_i und Lenkbeschleunigungen $\ddot{a}_i$ weist TOPP-RA in den meisten Fällen geringere Überschreitungen auf. Ab $n = 1000$ liegen die Überschreitungen aller betrachteten Größen bei beiden Verfahren unter 1 %. Für 4 und 64 Fahr-Lenkantriebe zeigt sich ein ähnliches Verhalten, nur dass bei 64 Fahr-Lenkantrieben die Überschreitungen der Grenzen erst bei $n = 4000$ kleiner als 1 % sind.

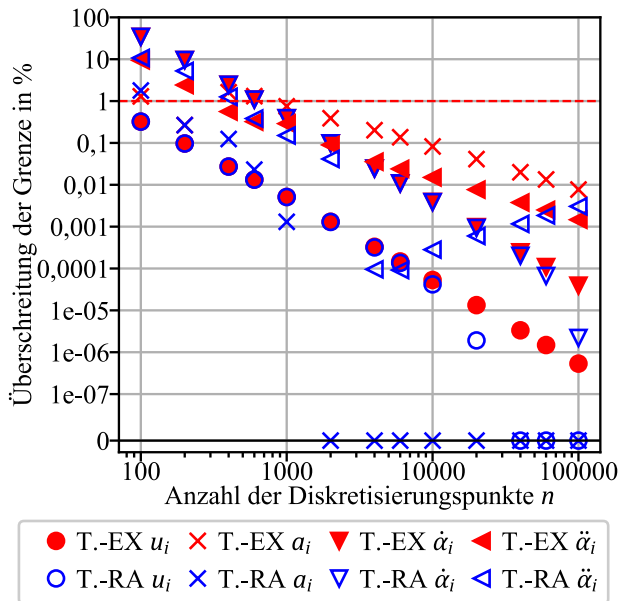


Abbildung 6. Maximale relative Überschreitungen der kinematischen Grenzen in Abhängigkeit von der Anzahl der Diskretisierungspunkte n für TOPP-EX und TOPP-RA

4.3 VERGLEICH DER FAHRZEIT

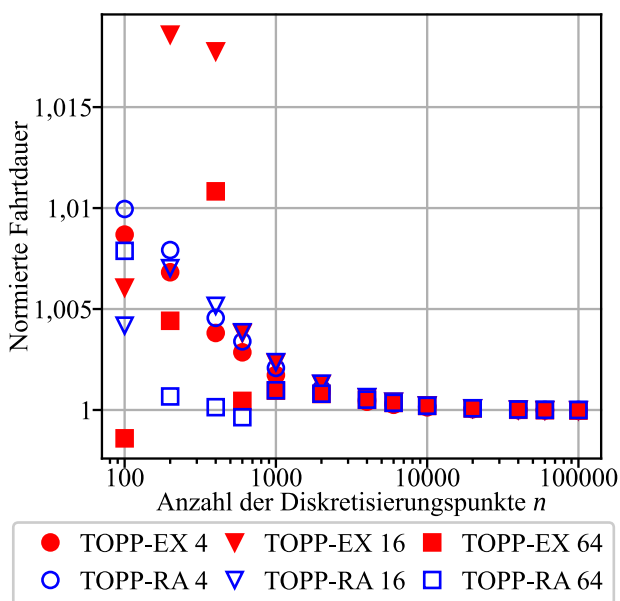


Abbildung 7. Die normierten Fahrzeiten in Abhängigkeit der Anzahl an Diskretisierungspunkten n für TOPP-EX und TOPP-RA

Abbildung 7 zeigt die mit TOPP-EX und TOPP-RA berechneten Fahrtdauern in Abhängigkeit von der Anzahl der Diskretisierungspunkte n . Die Fahrtdauern wurden jeweils auf die mit TOPP-RA bei $n = 100000$ berechnete Fahrtdauer normiert. Diese wird im Folgenden als Referenz genommen und dient zur Abschätzung, wie stark die berechneten Fahrtdauern vom näherungsweisen zeitoptimalen Verlauf abweichen.

Für alle untersuchten Konfigurationen beträgt die Abweichung von der Referenz weniger als 2 %. Bei einer geringen Anzahl an Diskretisierungspunkten liegt TOPP-RA überwiegend näher am Referenzwert als TOPP-EX. Mit zunehmender Anzahl an Diskretisierungspunkten nähern sich die Ergebnisse beider Verfahren der Referenz an. Bereits bei $n = 1000$ liegen die Abweichungen in allen untersuchten Fällen unter etwa 0,3 %.

Bei kleinen n ist ein direkter Vergleich der Fahrtdauern jedoch nur eingeschränkt aussagekräftig, da gleichzeitig die Überschreitungen der kinematischen Grenzen zunehmen. Eine kürzere Fahrtdauer kann somit teilweise dadurch entstehen, dass die vorgegebenen Grenzen aufgrund der Diskretisierung zwischen den Stützstellen überschritten werden. Das trifft insbesondere auf die zwei Fälle mit einer normierten Fahrtdauer unter eins bei $n = 100$ und $n = 600$ zu.

4.4 ANWENDUNG AM REALEN ROBOTERVERBUND

TOPP-EX wurde außerdem für Verbundfahrten mit den institutseigenen mobilen Robotern erprobt. Jeder Roboter berechnet eigenständig den Geschwindigkeitsverlauf v_k und muss dafür nur die Positionen aller Räder im Verbund und deren kinematischen Grenzen sowie Parameter zur Berechnung des abzufahrenden Pfades wissen. Bei realen Fahrten driften die Roboter aufgrund von Schlupf, Fertigungstoleranzen und Ungenauigkeiten im Antriebssystem von ihren Sollpositionen und Ausrichtungen ab. Für eine dauerhafte Einhaltung der gewünschten Relativpositionen und -ausrichtungen innerhalb des Verbundes ist daher zusätzlich eine Formationsregelung erforderlich.

5 DISKUSSION

Bei einer ausreichend feinen Diskretisierung liefern sowohl TOPP-EX als auch TOPP-RA Geschwindigkeitsverläufe, deren Fahrtdauer nur geringfügig von der verwendeten Referenzlösung abweicht und bei denen die kinematischen Grenzen weitgehend eingehalten werden. Bei einer vergleichsweise geringen Anzahl an Diskretisierungspunkten erzielte TOPP-RA in den durchgeführten Untersuchungen teilweise geringere Grenzüberschreitungen. Demgegenüber war die Berechnungszeit von TOPP-RA je nach untersuchter Konfiguration etwa 11- bis 220-mal höher als die von TOPP-EX. TOPP-EX bietet damit insbesondere für mobile Roboter mit begrenzter Rechenleistung sowie für die Berechnung langer Fahrstrecken Vorteile.

Ein weiterer Vorteil von TOPP-EX besteht darin, dass für einen Nothalt dasselbe grundlegende Rechenschema verwendet werden kann. Ausgehend vom aktuellen Zustand kann innerhalb von Millisekunden ein Geschwindigkeitsverlauf für eine synchrone Verzögerung des Fahrzeugverbundes bestimmt werden.

Im Vergleich zu klassischen Verfahren auf Basis Numerischer Integration benötigt TOPP-EX keine explizite Bestimmung von Switch Points. Dadurch wird die Implementierung vereinfacht und numerische Schwierigkeiten vermieden.

Wie auch in [10] werden die Geschwindigkeiten explizit berechnet. TOPP-EX berücksichtigt jedoch zusätzlich die Beschleunigungsgrenzen an beiden Segmenträndern. Vergleichsrechnungen zeigten, dass dadurch die Grenzüberschreitungen deutlich reduziert werden.

Eine Einschränkung der vorgestellten Methode besteht darin, dass ausschließlich Geschwindigkeits- und Beschleunigungsgrenzen der Fahr- und Lenkantriebe berücksichtigt werden. Die tatsächlich erreichbare Beschleunigung wird jedoch durch die dynamischen Eigenschaften des Antriebs und des Fahrzeugverbundes inklusive der Last bestimmt. Die Verwendung von Beschleunigungsgrenzen ist daher eine vereinfachte Beschreibung der Antriebsgrenzen. Für die praktische Anwendung hat das jedoch den Vorteil, dass kein vollständiges dynamisches Modell des Fahrzeugverbundes und der Last erforderlich ist. Mögliche Erweiterungen sind daher die Berücksichtigung dynamischer Antriebsgrenzen, beispielsweise maximal zulässiger Motor- und Radmomente. Auch eine Erweiterung um Ruckgrenzen ist denkbar.

Die Genauigkeit von TOPP-EX hängt außerdem von der gewählten Diskretisierung des Pfades ab. Eine feinere Diskretisierung reduziert die beobachteten Grenzüberschreitungen, erhöht jedoch gleichzeitig die Berechnungszeit. Eine mögliche Weiterentwicklung besteht daher in einer adaptiven Diskretisierung, bei der die Schrittweite beispielsweise abhängig von der Krümmung und deren Ableitungen gewählt wird. Bereiche mit starken Änderungen der Antriebskinematik könnten dadurch feiner und weitgehend konstante Bereiche gröber diskretisiert werden.

Weiterhin setzt die Methode ausreichend glatte Pfade voraus. Bei der Verwendung von Lenkantrieben sind Ableitungen der Pfadkrümmung bis zur zweiten Ordnung erforderlich. An Stellen, an denen die benötigte Ableitung nicht existiert, kann für die Einhaltung der Lenkbeschleunigungsgrenzen ein Stillstand des Roboterverbundes erforderlich sein. Ein solcher Stillstand ist im aktuellen Aufbau des Algorithmus nicht vorgesehen.

6 ZUSAMMENFASSUNG

Verbundfahrten von mehreren synchron verfahrenen mobilen Robotern bringen Vorteile, aber auch Herausforderungen mit sich. Eine zentrale Herausforderung ist die Zeitparametrisierung des vorgegebenen Pfades. Dabei wird ein Geschwindigkeitsverlauf gesucht, mit dem der Roboterverbund den Pfad möglichst schnell abfährt, ohne dass die kinematischen Grenzen seiner Antriebe überschritten werden.

Das Thema Zeitparametrisierung wurde bereits vielfach für Industrieroboter und einzelne mobile Roboter untersucht. Der in diesem Beitrag vorgestellte Algorithmus TOPP-EX überträgt diese Problemstellung auf Roboterverbünde und berücksichtigt dabei die individuellen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsgrenzen der einzelnen Fahr- und Lenkantriebe. Die Berechnung erfolgt explizit und ist unabhängig von der Anzahl und Anordnung der Räder. Im Gegensatz zu TOPP-RA werden innerhalb der Diskretisierungsschritte keine Optimierungsprobleme gelöst. In den durchgeführten Untersuchungen war TOPP-EX je nach Konfiguration 11- bis 220-mal schneller als TOPP-RA, während bei ausreichend feiner Diskretisierung vergleichbare Fahrtdauern und geringe Grenzüberschreitungen erreicht wurden.

LITERATUR

- [1] Z. Fan *et al.*, "A Cartesian-Based Trajectory Optimization with Jerk Constraints for a Robot," *Entropy (Basel, Switzerland)*, Early Access. doi: 10.3390/e25040610.
- [2] H. Pham und Q.-C. Pham, "A New Approach to Time-Optimal Path Parameterization Based on Reachability Analysis," *IEEE Trans. Robot.*, Jg. 34, Nr. 3, S. 645–659, 2018, doi: 10.1109/TRO.2018.2819195.
- [3] G. Lee, J. Kim und Y. Choi, "Convolution-Based Trajectory Generation Methods Using Physical System Limits," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Jg. 135, Nr. 1, 2013, Art. Nr. 011001, doi: 10.1115/1.4007551.
- [4] R. Oftadeh, R. Ghabcheloo und J. Mattila, "Universal Path-Following of Wheeled Mobile Robots: A Closed-Form Bounded Velocity Solution," *Sensors (Basel, Switzerland)*, Early Access. doi: 10.3390/s21227642.
- [5] M. Benko Loknar, S. Blažič und G. Klančar, "Minimum-time velocity profile planning for planar motion considering velocity, acceleration and jerk constraints," *International Journal of Control*, Jg. 96, Nr. 1, S. 251–265, 2023, doi: 10.1080/00207179.2021.1987526.
- [6] L. Consolini, M. Locatelli, A. Minari und A. Piazzini, "An optimal complexity algorithm for minimum-time velocity planning," *Systems & Control Letters*, Jg. 103, S. 50–57, 2017, doi: 10.1016/j.sysconle.2017.02.001.
- [7] J. Gao, F. Claveau, A. Pashkevich und P. Chevrel, "Real-time motion planning for an autonomous mobile robot with wheel-ground adhesion constraint," *Advanced Robotics*, Jg. 37, Nr. 10, S. 649–666, 2023, doi: 10.1080/01691864.2023.2186188.
- [8] Y. Li, Y. Huang, Y. Chen und H. Cheng, "TOPP-DWR: Time-Optimal Path Parameterization of Differential-Driven Wheeled Robots Considering Piecewise-Constant Angular Velocity Constraints,"

in 2025 *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Hangzhou, China, 2025, S. 11419–11426, doi: 10.1109/IROS60139.2025.11246920.

- [9] P. Shen, X. Zhang und Y. Fang, "Complete and Time-Optimal Path-Constrained Trajectory Planning With Torque and Velocity Constraints: Theory and Applications," *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, Jg. 23, Nr. 2, S. 735–746, 2018, doi: 10.1109/TMECH.2018.2810828.
- [10] M. Yuan, Z. Chen, B. Yao und X. Zhu, "Time Optimal Contouring Control of Industrial Biaxial Gantry: A Highly Efficient Analytical Solution of Trajectory Planning," *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, Jg. 22, Nr. 1, S. 247–257, 2017, doi: 10.1109/TMECH.2016.2592518.
- [11] C. C. Brenner, "Interoperabilität beliebiger fahrerloser Transportfahrzeuge durch eine einheitliche Bewegungskoordination für die zukünftige vernetzte Intralogistik," 2024, doi: 10.18419/opus-14520.

Lukas Karzel, M.Sc., Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Fördertechnik und Logistik (IFT), Universität Stuttgart.

Dr.-Ing Jonas Nölcke, Leiter der Abteilung Materialflussautomatisierung des Instituts für Fördertechnik und Logistik (IFT), Universität Stuttgart.

Univ.-Prof. Dr.-Ing Robert Schulz, Leiter des Instituts für Fördertechnik und Logistik (IFT), Universität Stuttgart.

Adresse: Institut für Fördertechnik und Logistik (IFT), Universität Stuttgart, Holzgartenstraße 15 B, 70174 Stuttgart, Telefon: +49 711 685 83940, E-Mail: lukas.karzel@ift.uni-stuttgart.de